"Funzione di distribuzione"

Esempio 3.12 - Distribuzione Gamma e distribuzione esponenziale

La definizione della funzione gamma è

(1) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \text{per} \quad \alpha > 0$$

(2) per $\alpha = 1$ $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

(3) per $0 \le \alpha = 0, 1, 2, ...$ (intero) si ha: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) = \alpha!$ dove $0! = 1$

Possiamo anche ricordare che per $\alpha = 1/2$ risulta:

(4) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx =$$

posto $z^2 = x \quad \Rightarrow \quad z = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad 2dz = x^{-1/2} dx$ la (4) diventa:

(5) $$2\int_0^\infty e^{-z^2} dz = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(6) L'integrale $Z = \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx$ per β anche complesso, ma con parte reale > 0,

si può calcolare osservando che alla variabile x è stata sostituita la variabile βx. Quindi la (6) diventa:

(7) $$Z = \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}$$

Se β è reale è lecito assumere come ***densità di probabilità*** la funzione

(8) $$\varphi(x) = f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0 \\ \dfrac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\beta x} & \text{per} \quad x > 0 \qquad \alpha > -1 \qquad \beta > 0 \end{cases}$$

(9) Risulta infatti: $$\int_0^\infty f(x, \alpha, \beta) dx = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx = 1$$

Una forma particolare della distribuzione Γ è la ***distribuzione esponenziale***

(10 $$\varphi(x) = \beta e^{-\beta x} \qquad \text{per} \quad \alpha = 0 \qquad x > 0 \qquad \beta > 0$$

$$\int_0^\infty \varphi(x) dx = \int_0^\infty \beta e^{-\beta x} dx = 1$$

Distribuzione Γ e distribuzione esponenziale hanno notevole importanza nel settore dei tempi d'attesa, nella durata di componenti elettronici, negli intervalli di tempo tra guasti di componenti, ecc.