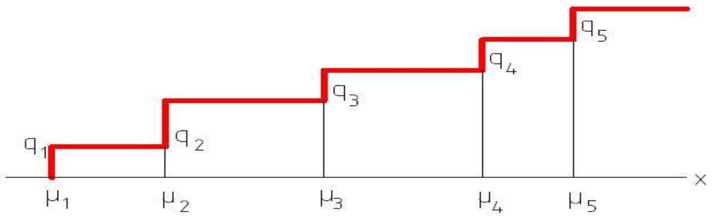
"Funzione di distribuzione"



Funzione di distribuzione a gradino

Sia abbia una variabile aleatoria x nel campo $(-\infty \leq x \leq t)$, la quale può assumere i valori $\mu_1,\ \mu_2,\ ...\ \mu_n$ rispettivamente con probabilità $q_1,\ q_2,\ ...q_n$. Ci si propone di trovare la probabilità che x assuma valori minori o uguali $\bar{x} = t$. Analizziamo dunque il problema:

$$
\begin{array}{ll}
p(-\infty < x \leq t) = 0 & t < \mu_1 \\
p(-\infty < x \leq t) = q_1 & \mu_1 \leq t < \mu_2 \\
p(-\infty < x \leq t) = q_1 + q_2 & \mu_2 \leq t < \mu_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
p(-\infty < x \leq t) = q_1 + q_2 + \ldots + q_i & \mu_i \leq t < \mu_{i+1}
\end{array}
$$

(1) Definiamo la ***funzione gradino*** $\varepsilon(x-\mu) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ 1 & x \geq \mu \end{cases}$ La funzione di figura risponde a:

(2) $$\Phi(t) = \sum_j q_j \varepsilon(t-\mu_j) \quad \text{per} \quad \mu_i \leq t \quad \text{sarà} \quad \begin{cases} \varepsilon(t-\mu_j) = 1 \ \text{ per tutti } \ j \leq i \\ \varepsilon(t-\mu_j) = 0 \ \text{ per tutti } \ j > i \end{cases}$$

Se il campo dei valori di x si estende all'infinito allo ra più in generale avremo:

(3) $$\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_j \varepsilon(t-\mu_j)$$

La funzione $\Phi(x)$ che dà la probabilità cumulativa $p(t \leq x)$ alla variabile aleatoria di assumere uno dei valori compresi in $-\infty...x$ si dice ***funzione di distribuzione.*** Essa è funzione sempre ≥ 0 mai decrescente, variante per salti positivi in corrispondenza di ogni valore $x = \mu_j$ e in ogni caso sarà $\Phi(-\infty) = 0$ e $\Phi(+\infty) = 1$.

Estendere il concetto di *funzione di distribuzione* al caso di variabili aleatorie discrete pluridimensionali è immediato.

Esempio: supponiamo che l'evento sia contrassegnato da coppie di numeri costituenti le due successioni:

(4) $$\begin{array}{lllllll} \mu_1, & \mu_2, & \ldots & \mu_i, & \ldots & \mu_n & \ldots \\ \nu_1, & \nu_1, & \ldots & \nu_i, & \ldots & \nu_n, & \ldots \end{array}$$ per ogni coppia di numeri $\mu_r \leq x < \mu_{r+1}$ e $\nu_r \leq y < \nu_{r+1}$

la *funzione di distribuzione* è costante in tutto il dominio del piano xy definito dalle due disuguaglianze e, se con q_{ij} indichiamo la probabilità inerente all'evento contrassegnato con i numeri μ_i, ν_i, essa varrà:

(5) $$\Phi(x,y) = \sum_{i=-\infty}^{r} \sum_{j=-\infty}^{s} q_{ij} \varepsilon(x-\mu_j) \cdot \varepsilon(y-\nu_j)$$

Per meglio intendere il concetto di distribuzione di probabilità si potrà ricorrere ad un modello di geometria delle masse; precisamente al modello della distribuzione di una massa unitaria sui punti dell'insieme indice considerati come punti di uno spazio cioè:

il punto con "i" nel caso mododimensionale, il punto con "i,j,...n" nel caso pluridimensionale.