"Condizione di normalizzazione e suo impiego"

Esempio 3.7 - Calcolo di costanti indeterminate

Nella ***Statistica quantica*** - si vedano studi di Gibbs o di Boltzmann - gli stati quantici di energia sono:

$0,\ h\nu,\ 2h\nu,\ \ldots,\ nh\nu,\ \ldots$ dove h= costante di Plank e $\nu =$ frequenza.

La probabilità del n-esimo stato quantico è così espressa:

(1) $p(n) = Be^{-n\frac{h\nu}{kT}}$ in cui k=costante di Boltzmann T= temperatura B=costante indeterminata

La condizione di normalizzazione dunque è

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = B\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{h\nu}{kT}} = 1$$

La serie che moltiplica B è una serie geometrica di ragione pari a $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$; risulta allora:

(3) $$B = 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

e di conseguenza:

(4) $$p(n) = e^{-n\frac{h\nu}{kT}} - e^{-(n+1)\frac{h\nu}{kT}}$$

Pertanto la probabilità di uno stato energetico $E \geq mh\nu$ vale

(5) $$p(n) = \sum_{n=m}^{\infty} e^{-m\frac{h\nu}{kT}}$$

Come casi particolari possiamo assumere $\beta = 0$ e β=1.

(9) $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{\beta\to 0} p(0) = \lim_{\beta\to 0}(1+\beta\mu)^{-\frac{1}{\beta}} = e^{-\mu}$

$$\lim_{\beta\to 0}\left(\frac{-\beta\mu}{1+\beta\mu}\right)^x \binom{-\frac{1}{\beta}}{x} = \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{-\mu}{1+\beta\mu}\right)^x \frac{\beta^x\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\beta}-1\right)\left(-\frac{1}{\beta}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{\beta}-x+1\right)}{x!} = \frac{\mu^x}{x!}$$

Quindi:

(10) $\lim_{\beta\to 0} p(x) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}$ ***distribuzione di Poisson***

(11) β=1 $\Rightarrow$ $p(x) = \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x$ ***distribuzione di Pascal***