"Distribuzioni di probabilità"

Esempio 3.6 - Distribuzione binomiale negativa

Si giochi a testa o croce. Si chiede la probabilità che la r-esima testa sia stata preceduta da x croci.

Soluzione

Si hanno due parametri: il numero r e la probabilità p dell'evento E all'atto di ogni prova.

Se x è il numero di volte in cui si è presentato l'evento contrario a E, allora il numero di prove effettuate prima della r-esima è $(r-1+x)$. Dunque $x \; prove\; con\; risultato\; \bar{E}\; in\; (r+x-1)\; prove$ e le modalità in cui collocarvi l'evento Ē saranno $\binom{r+x-1}{x}$. A ciascuna di tali modalità, per il principio delle probabilità composte, e tenendo conto che alla (r+x)-esima risulta E, compete la probabilità $p^r q^x$ dove $q = 1 - p$.

Pertanto la probabilità da calcolare è

(1) $$p(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x$$

Osserviamo che è:

(2) $$\binom{r+x-1}{x} = \frac{(r+x-1)(r+x-2)\ldots(r+x-1-x+1)}{x!} = \frac{(r+x-1)(r+x-2)\ldots(r+1)(r)}{x!} =$$

$$= (-1)^x \frac{(-r)(-r-1)\ldots(-r-x+1)}{x!} = (-1)^x \binom{-r}{x}$$

Pertanto si può scrivere:

(3) $$p(x) = \binom{-r}{x} p^r (-1)^x q^x = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \qquad \begin{cases} x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ r > 0 \quad p > 0 \end{cases}$$

La serie binomiale

(4) $$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x$$ è convergente perché $|-q| < 1$ e sarà pertanto

(5) $$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x = (1-q)^{-r} = p^{-r}$$ e conseguentemente

(6) $$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} (-q)^x = p^x p^{-r} = 1$$

Introducendo due costanti $\beta \geq 0$ e $\mu > 0$ definite dalle relazioni

(7) $$r = \frac{1}{\beta} \qquad p = \frac{1}{1+\beta\mu}$$ la $p(x)$ può scriversi

(8) $$p(x) = (1+\beta\mu)^{-\frac{1}{\beta}} \binom{-\frac{1}{\beta}}{x} \left(\frac{-\beta\mu}{1+\beta\mu} \right)^x$$ nota come ***distribuzione di Polya***

Come casi particolari possiamo assumere $\beta = 0$ e $\beta=1$.

(9) $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{\beta\to 0} p(0) = \lim_{\beta\to 0}(1+\beta\mu)^{-\frac{1}{\beta}} = e^{-\mu}$

$$\lim_{\beta\to 0}\left(\frac{-\beta\mu}{1+\beta\mu}\right)^x \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} \\ x \end{pmatrix} = \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{-\mu}{1+\beta\mu}\right)^x \frac{\beta^x\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\beta}-1\right)\left(-\frac{1}{\beta}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{\beta}-x+1\right)}{x!} = \frac{\mu^x}{x!}$$

Quindi:

(10) $\lim_{\beta\to 0} p(x) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}$ ***distribuzione di Poisson***

(11) $\beta=1$ $\Rightarrow$ $p(x) = \frac{1}{1+\mu}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x$ ***distribuzione di Pascal***