Esempio 3.3 - Distribuzione ipergeometrica

In un precedente esercizio si trattava di un'urna, contenente $N = a + b$ palle, di cui a bianche e b nere. Estraendo n palle, ci si chiedeva qual era la probabilità che di queste α fossero bianche e β fossero nere.

Soluzione

La probabilità vale:

(1)
$$p(\alpha) = \frac{\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}}{\binom{a+b}{\alpha+\beta}} = \frac{\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}}{\binom{N}{n}}$$

Lo schema dell'urna, generalizzando, si può pensare ad un insieme di N elementi, tra i quali M hanno una caratteristica c. Ebbene la probabilità, che scegliendo a caso n elementi tra gli N ve ne siano x, degli M, aventi caratteristica c, vale:

(2)
$$p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{con } x = 1, 2, \ldots, n$$

Rimandando al *Calcolo combinatorio* si ha:

(3)
$$\sum_{x=0}^{n}\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} = \binom{M+N-M}{x+n-x} = \binom{N}{n}$$

ne risulta:

(4)
$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

Tale legge è comunemente nota come ***ipergeometrica.***

Se si fa tendere N all'infinito essa tende alla legge ***binomiale***. Esplicitiamo la (2) come segue:

(5)
$$p(x) = \frac{\dfrac{M(M-1)\ldots(M-x+1)}{x!}\cdot\dfrac{(N-M)(N-M-1)\ldots(N-M-n+x+1)}{(n-x)!}}{\dfrac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}} =$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{M(M-1)\ldots(M-x+1)\cdot(N-M)(N-M-1)\ldots(N-M-n+x+1)}{N^n\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

Commentato [G1]:

Assumiamo ognuno degli n fattori N del denominatore come divisore di ognuno degli $(x+n-x)$ fattori del numeratore del moltiplicatore $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ e poniamo $\theta = \dfrac{M}{N}$ che supporremo costante al variare di N (il che significa supporre costante il numero degli elementi affetti dalla caratteristica c e rapportati al numero totale di elementi, e quindi costante la probabilità di uno di essi). Si avrà:

(6) $$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \frac{\theta\left(\theta - \frac{1}{N}\right)\ldots\left(\theta - \frac{x-1}{N}\right)(1-\theta)\left(1-\theta-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\theta-\frac{n-x-1}{N}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}$$

e di conseguenza

(7) $$\lim_{N\to\infty} p(x) = \binom{n}{x}\theta^x (1-\theta)^{n-x}$$