

“Teorema di Bayes”

Commentato [G1]:

Esempio 2.13

Un'officina produce viti di un certo tipo, le quali vengono confezionate in scatole da 1200 viti/cad.

Una consolidata esperienza assicura che la % dei pezzi difettosi nelle scatole sia così distribuita:

% pezzi difettosi	% di scatole
0/100	78/100
1/100	17/100
2/100	34/1000
3/100	9/1000
4/100	5/1000
5/100	2/1000
6/100	0,00/1000

La tolleranza di fabbricazione è stabilita al 2/100, nel senso che si rigettano scatole aventi una % di pezzi difettosi > 2/100. Il collaudo di una scatola consiste nell'esaminare 50 viti prese a caso.

Una scatola così esaminata dà 6 viti difettose. Che probabilità c'è che questa scatola sia fuori tolleranza ?

Soluzione

In una scatola in cui la % dei pezzi difettosi è $a/100$ vi saranno:

(1) $1200 * a/100 = 12a$ viti difettose e $1200 - 12a$ viti regolari.

Per quanto si è visto in precedenza la probabilità di estrarre da essa 6 viti difettose 44 viti regolari vale:

(2)
$$\frac{\binom{12a}{6} \binom{1200-12a}{44}}{\binom{1200}{50}}$$

Assumiamo d'altro canto, come valori di probabilità $p(a)$ di scatole aventi rispettivamente 0/100, 1/100, 2/100... di pezzi difettosi, le sopra elencate frequenze 78/100, 17/100,; per la formula del Bayes la probabilità della uscita di 6 viti difettose da una scatola in cui la % delle viti difettose è \bar{a} vale:

(3)
$$p(6, \bar{a}) = \frac{p(\bar{a}) \binom{12\bar{a}}{6} \binom{1200-12\bar{a}}{44} / \binom{1200}{50}}{\sum p(a) \binom{12a}{6} \binom{1200-12a}{44} / \binom{1200}{50}} = \frac{p(\bar{a}) \binom{12\bar{a}}{6} \binom{1200-12\bar{a}}{44}}{\sum p(a) \binom{12a}{6} \binom{1200-12a}{44}}$$

Eseguiti i calcoli, si ottiene: $\sum p(a) \binom{12a}{6} \binom{1200-12a}{44} = 3,611 * 10^{39}$

La somma delle probabilità che l'evento "6 pezzi difettosi su 50 estratti" sia dovuta al fatto che l'estrazione è stata fatta da una scatola in cui la % dei pezzi difettosi è > 2/100 vale 0,396, somma delle probabilità che l'evento stesso sia dovuto ad estrazione da scatole con % non tollerate.