"Teorema di Bayes"

Commentato [G1]:

Esempio 2.12

Un'urna A contiene ugual numero di palle bianche e nere; un bambino bendato toglie dall'urna una palla e la pone in un'altra urna B. Un suo aiutante, preso nota del colore della palla estratta, la sostituisce in A con altra di ugual colore, e rimescola. Il bambino estrae quindi da A una seconda palla e la pone in B. Come prima l'aiutante pone in A una palla di ugual colore, e rimescola. L'operazione si ripete identicamente per 10 volte. Dall'urna B, che contiene 10 palle, per cinque volte consecutive si estrae una palla, che, dopo l'estrazione, viene riposta nell'urna. Le cinque estrazioni hanno dato: 4 palle nere e 1 palla bianca.
Determinare la più probabile composizione dell'urna B.

Soluzione

La probabilità di estrarre una palla bianca (o nera) da A, ad ogni estrazione, è 1/2. La probabilità a priori che n palle $(0 \le n \le 10)$ siano bianche (o nere) per il teorema delle prove ripetute è:

(1) $$p(n) = \binom{10}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-n} = \binom{10}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Se in B le palle bianche sono n, la probabilità di estrarre una palla bianca è n/10, e quindi la probabilità a priori $p_n(b)$ di ottenere, in 5 estrazioni, 1 bianca e 4 nere, per lo stesso teorema, vale:

(2) $$p_n(b) = \binom{5}{1}\frac{n}{10}\left(1-\frac{n}{10}\right)^{4}$$

Segue per il teorema di Bayes che la probabilità condizionata è

(3) $$p_b(n) = \frac{\binom{10}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{5}{1}\frac{n}{10}\left(\frac{10-n}{10}\right)^{4}}{\sum_{m=0}^{10}\binom{10}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{5}{1}\frac{m}{10}\left(\frac{10-m}{10}\right)^{4}} = \frac{\binom{10}{n}n(10-n)^{4}}{\sum_{m=0}^{10}\binom{10}{m}m(10-m)^{4}}$$

(4) $$\begin{cases}
m=0 \;\Rightarrow\; \frac{10*9}{0!}=0 \\
m=1 \;\Rightarrow\; \frac{10*1}{1!}*1*(10-1)^4=65.610 \\
m=2 \;\Rightarrow\; \frac{10*9}{2!}*2*(10-2)^4=368.640 \\
m=3 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8}{3!}*3*(10-3)^4=864.360 \\
m=4 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7}{4!}*4*(10-4)^4=1.088.640 \\
m=5 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7*6}{5!}*5*(10-5)^4=787.500 \\
m=6 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7*6*5}{6!}*6*(10-6)^4=322.560 \\
m=7 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7*6*5*4}{7!}*7*(10-7)^4=68.040 \\
m=8 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7*6*5*4*3}{8!}*8*(10-8)^4=5.760 \\
m=9 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2}{9!}*9*(10-9)^4=90 \\
m=10 \;\Rightarrow\; \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{10!}*10*(10-10)^4=0
\end{cases} \qquad \left\{\sum_{m=0}^{10}\binom{10}{m}m(10-m)^4 = 3.571.200\right.$$

$$(5)\qquad \begin{cases} n=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{10}{0!}*0*(10-0)^4=0 \\ n=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{10}{1}*1*(10-1)^4=65610 \\ n=2 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9}{1*2}*2*(10-2)^4=368640 \\ n=3 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8}{1*2*3}*3*(10-3)^4=864360 \\ n=4 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7}{1*2*3*4}*4*(10-4)^4=1088640 \\ n=5 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7*6}{1*2*3*4*5}*5*(10-5)^4=787500 \\ n=6 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7*6*5}{1*2*3*4*5*6}*6*(10-6)^4=322560 \\ n=7 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7*6*5*4}{1*2*3*4*5*6*7}*7*(10-7)^4=68040 \\ n=8 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7*6*5*4*3}{1*2*3*4*5*6*7*8}*8*(10-8)^4=5760 \\ n=9 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7*6*5*4*3*2}{1*2*3*4*5*6*7*8*9}*9*(10-9)^4=90 \\ n=10 \;\Rightarrow\; \dfrac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10}*10*(10-10)^4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{0}{3.571.200}=0 \\ \dfrac{65.610}{3.571.200}=0,0184 \\ \dfrac{368.640}{3.571.200}=0,1032 \\ \dfrac{864.360}{3.571.200}=0,2420 \\ \dfrac{1.088.640}{3.571.200}=0,3048 \\ \dfrac{787.500}{3.571.200}=0,2205 \\ \dfrac{322.560}{3.571.200}=0,0903 \\ \dfrac{68.040}{3.571.200}=0.0190 \\ \dfrac{5.760}{3.571.200}=0,0016 \\ \dfrac{90}{3.571.200}=0,000025 \\ \dfrac{0}{3.571.200}= \end{cases}$$

Il valore massimo della probabilità cercata è per n=4: 0,3048.