"Teorema di Bayes"

Esempio 2.10

Una interessante applicazione della formulazione più generale del teorema del Bayes

(1) $$p\left(A\cdot C,B_j\right)=\frac{p\left(A;B_j\right)\cdot p\left(A\cdot B_j;C\right)}{\sum_{1=i}^{r}p\left(A;B_i\right)\cdot p\left(A\cdot B_i;C\right)}$$

consente di evidenziare l'illegittimità di assumere la equiprobabilità degli eventi B_i quando le probabilità degli eventi stessi siano ignote. Il problema riguarda, in sostanza, la legittimità della inferenza induttiva e potrebbe porsi nella sua posizione generale in questa forma: si sono fatte n prove e si sono ottenute n volte l'evento E; si fanno altre successive n_1 prove, e ci si domanda: che probabilità c'è che l'evento E si manifesti ancora in tali prove ? Un esempio potrebbe essere il seguente.

Da un'urna di composizione incognita si sono estratte n palline, ciascuna di color bianco; si procede con altre n_1 estrazioni e ci si domanda che probabilità vi è perché anche queste n_1 estrazioni diano pallina bianca.

Si potrebbe evidentemente rispondere se si conoscesse la probabilità q di estrarre una pallina bianca dall'urna; in tal caso la probabilità di estrarre le prime n palline bianche è q^n, quello di estrarre la seconda serie di n_1 palline bianche è q^{n_1}; la probabilità che, avendo estratte n palline bianche se ne aggiungano ancora n_1 è q^{n+n_1}. Se si conoscesse la probabilità $p(q)$ di un certo valore q allora la probabilità dell'evento $n+n_1$ palline bianche varrebbe: $p(q)q^{n+n_1}$. Disponendo di N composizioni di urne, ciascuna delle quali avente probabilità $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_N$, la probabilità dell'evento C ($n+n_1$ palline bianche dopo $n+n_1$ estrazioni) sarebbe per *il principio delle probabilità totali*

(2) $$p(C)=\sum_{i=1}^{N}p(q_i)q_i^{n+n_1}$$

e quella dell'evento B (n palline bianche estratte nelle prime n estrazioni)

(3) $$p(B)=\sum_{i=1}^{N}p(q_i)q_1^{n}$$

Applicando la (1) (senza la A) si ottiene:

(4) $$p(C,B)=\frac{p(B)}{p(C)}\cdot p(B;C)=1$$ Ed infatti così si spiega:

è certo che se si verifica l'evento C si è prima verificato l'evento B; l'evento C non si verificherebbe se non si fosse verificato l'evento B. Pertanto dalla (4) ricaviamo:

(5) $$p(B;C)=\frac{p(C)}{p(B)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p(q_i)q_i^{n+n_1}}{\sum_{i=1}^{N}p(q_i)q_1^{n}}$$

I cosiddetti sostenitori della ragione insufficiente, ignorando i valori $p(q_i)$, assumono che questi siano tutti uguali fra loro e pertanto, assunto N sufficientemente grande, pongono:

(6) $$q_i=\frac{i}{N}\qquad \text{e}\qquad p(q_i)=\frac{1}{N}\qquad (i=1,2,...N)$$

Il valore di $p(B;C)$ risulta allora

$$p(B;C)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+n_1}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}} \tag{7}$$

Se N è molto grande si può pensare 1/N come ad una variabile x continua che varia da 0 a 1; così la (7) diventa

$$p(B;C)=\frac{\int_0^1 x^{n+n_1}dx}{\int_0^1 x^n dx}=\frac{\frac{1}{n+n_1+1}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n+n_1+1} \tag{8}$$

Questa formula, nel classico calcolo delle probabilità, è designata come "*legge generale di successione*" di Laplace e fornisce dunque, con le ipotesi sopra dette, la probabilità che un evento di probabilità incognita ad ogni prova, essendosi presentato in n prove, si ripresenti nelle n_1 successive.

Se si pone $n_1=1$ si ha la cosiddetta "*legge speciale di successione*" di Laplace, la quale assegna la probabilità $n+1/n+2$ che l'evento, essendosi presentato in n prove, si ripresenti anche nella (n+1)-esima prova.

Vediamo gli assurdi cui si perviene con tale legge.

Un giovane di 20 anni, che ha superato la prova di vivere 1 anno per 20 anni consecutivi, avrebbe la probabilità $21/22=0,95$ di vivere il 21-esimo anno.

Mentre un vecchio di 90 anni avrebbe la probabilità $91/92=0,99$ di vivere ancora un altro anno.

Laplace supponeva che essendovi 5000 anni di storia dell'umanità si poteva asserire che il Sole fosse sorto per 1.826.200 giorni; per la legge speciale di successione si poteva scommettere 1.826.201 contro 1 che il Sole sarebbe sorto il giorno successivo.

Se però si usa la legge generale di successione si deve concludere che il Sole ha probabilità di sorgere per altri 5000 anni pari a 5000/10.000=1/2.

Cioè vi sarebbe la probabilità che, in tale periodo, il Sole non sorgesse più !