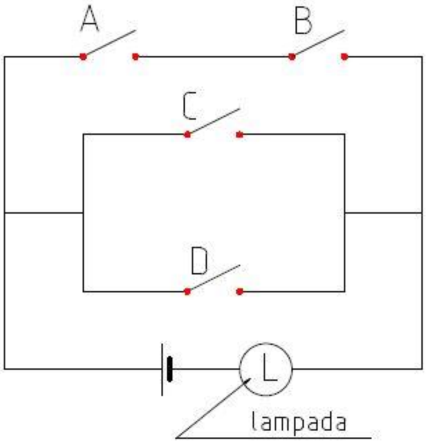
"Principio delle probabilità totali"



Esempio 2.7

Nello schema elettrico ciascuno degli interruttori, indipendentemente dagli altri, ha la probabilità di 1/2 di essere chiuso. Determinare la probabilità che la lampada sia accesa.

Soluzione

Siano A, B, C, D, L gli eventi, rispettivamente, interruttori chiusi e lampada accesa.

L'evento L si manifesterà in due modalità che non si escludono:

$$\begin{cases} \text{A e B sono chiusi } \Rightarrow p(A\cdot B)=\dfrac{1}{4} \\ \text{C chiuso oppure D chiuso, oppure C e D chiusi entrambi } \begin{cases} C\ chiuso \Rightarrow p(C)=1/2 \\ D \text{ chiuso} \Rightarrow p(D)=1/2 \\ C\wedge D \Rightarrow p(C\wedge D)=1/2+1/2 \end{cases} \end{cases}$$

La probabilità cercata vale:

$$p(L)=p(A\cdot B)+p(C\wedge D)-p\left[(A\cdot B)\cdot(C\wedge D)\right]=$$

$$=p(A)\cdot p(B)+p(C)+p(D)-p(C)\cdot p(D)-p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)-p(A)\cdot p(B)\cdot p(D)+p(A)\cdot p(B)\,p(C)\,p(D)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{13}{16}$$