"Valutazione di probabilità"

Problemi di urne

a) - Un'urna contiene $m = a + b$ palline, precisamente a bianche e b nere. Vengono estratte in blocco n palline. Trovare la probabilità che di queste n palline $\alpha \le a$ siano binache e che $\beta = n - \alpha$ siano nere.

Soluzione

casi possibili = $\binom{m}{n}$ casi favorevoli = $\binom{a}{\alpha}$ casi favorevoli = $\binom{b}{\beta}$

probabilità richiesta = $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\Big/\binom{m}{n} = \binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\Big/\binom{a+b}{\alpha+\beta}$ b) -

a) - Se $a \le b+1$, trovare la probabilità che, estraendo successivamente le m palline, non se ne abbiamo mai due bianche consecutive.

Soluzione

Affinché ciò si verifichi occorre che le a palline bianche occupino i b+1 posti disponibili tra due delle b palline nere, cioè un posto avanti la prima e un posto dopo la b n-esima. Ciò si può fare in quanti modi si possono combinare i $b+1$ posti ad a ad a ovvero in $\binom{b+1}{a}$ maniere, per ciascuna delle combinazioni così ottenute permutando in tutti gli $a!$ modi possibili le a palline bianche e in tutti i $b!$ modi possibili le b palline nere.

I casi possibili sono = $m! = (a+b)!$ I casi favorevoli sono = $a!b!\binom{b+1}{a}$

La probabilità cercata è = $$\frac{a!b!\binom{b+1}{a}}{(a+b)!} = \frac{\binom{b+1}{a}}{\frac{(a+b)!}{a!b!}} = \frac{\binom{b+1}{a}}{\binom{a+b}{a}}$$

c) - Trovare la probabilità che l'ultima delle a palline bianche, nell'estrazione successivamente compiuta delle m palline, venga a trovarsi al i-esimo posto.

Soluzione

Ciò si rende possibile in quanti modi le $a-1$ palline bianche, precedenti l'ultima, siano disposte negli $i-1$ posti precedenti lo i-esimo e quindi in $\binom{i-1}{a-1}$ maniere, in ciascuna delle quali peraltro, le palline bianche possono essere permutate in $a!$ modi e quelle nere in $b!$ modi.

I casi possibili sono = $m! = (a+b)!$ I casi favorevoli sono = $a!b!\binom{i-1}{a-1}$

La probabilità cercata è = $$\frac{a!b!\binom{i-1}{a-1}}{(a+b)!} = \frac{\binom{i-1}{a-1}}{\binom{m}{a}}$$