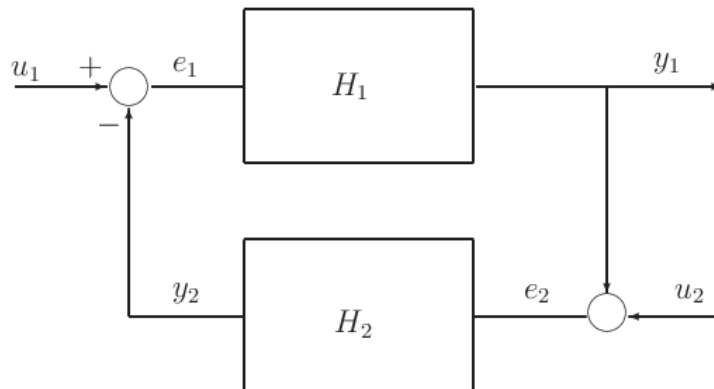


## Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

## Stabilità assoluta dei sistemi di controllo

Gianluca Angelone



### Sommario

Nel presente documento si discute il problema della stabilità assoluta dei sistemi di controllo nella cosiddetta forma di Lur'e. Si introducono alcuni concetti preliminari, quali passività e non linearità settoriale, per arrivare a dimostrare i criteri del cerchio e di Popov.

---

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Well-posedness del problema . . . . .	4
1.2	Congetture di Aizerman e Kalman . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Sistemi passivi</b>	<b>4</b>
2.1	Funzioni non lineari senza memoria . . . . .	5
2.2	Sistemi dinamici . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Interconnessione di sistemi</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Criterio del cerchio</b>	<b>9</b>
4.1	Loop transformation . . . . .	9
4.2	Dal piccolo guadagno al cerchio . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Criterio di Popov</b>	<b>11</b>

# 1 Introduzione

Il problema della stabilità assoluta, formulato originariamente da Lur'e, e pertanto detto anche *Lur'e problem*, riguarda lo studio della stabilità di un sistema ottenuto dalla retroazione di un sistema dinamico lineare con uno statico non lineare. Il problema è di particolare rilevanza nella teoria dei controlli automatici in quanto un generico sistema di controllo contiene tipicamente dei componenti non lineari (nel caso più comune c'è la saturazione degli attuatori, o ci sono trasduttori con caratteristiche non lineari al di fuori dell'intervallo di funzionamento nominale) ed è interesse del progettista evitare che eventuali non linearità possano compromettere la stabilità del sistema a ciclo chiuso. Il problema si pone, quindi, in maniera generale come analisi della stabilità rispetto ad una classe di funzioni non lineari, con determinate caratteristiche, piuttosto che lo studio riferito ad una particolare non linearità [2]. Nel seguito, per semplicità, assumeremo che  $\phi(\cdot)$  è una funzione continua, escludendo quindi i cosiddetti "salti" e le funzioni a valori in un insieme (*set-valued functions*).

Dato un sistema in retroazione, come riportato nella Figura 1, con:

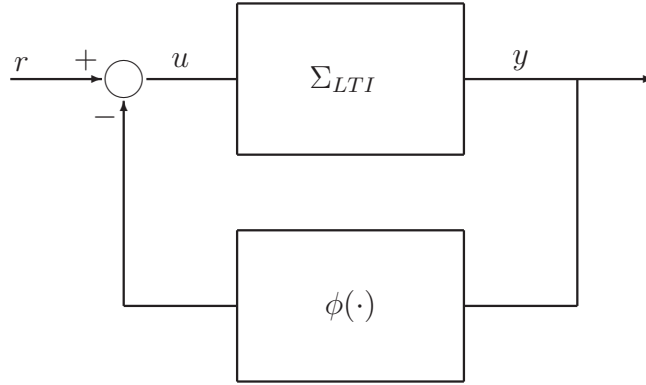


Figura 1: Schema di retroazione nella forma di Lur'e.

$$\Sigma_{LTI} : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

$r = 0$ ,  $u, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(A, B)$  controllabile e  $(A, C)$  osservabile e la funzione  $\phi(\cdot)$ , in generale, non lineare e tempo variante.

Si assume che la caratteristica appartiene, come suol dirsi, al settore  $[k_1, k_2]$ , cioè:

$$\phi \in \Phi_{[k_1, k_2]} = \{\phi : k_1 \sigma^2 \leq \sigma \phi(\sigma) \leq k_2 \sigma^2, \forall \sigma \in \mathbb{R}\}. \quad (2)$$

La (2), infatti, in modo equivalente, si può riscrivere

$$\{k_1 \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k_2, \sigma \neq 0\} \quad (3)$$

cioè  $\phi$  è una qualunque non linearità limitata da un settore individuato dalle rette  $y_1 = k_1 \sigma$  e  $y_2 = k_2 \sigma$ .

Analogamente possiamo definire il *settore incrementale*:

$$\Phi_{[k_1^{(i)}, k_2^{(i)}]}^{(i)} = \{\phi : k_1^{(i)} \leq \frac{\phi(\sigma_2) - \phi(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq k_2^{(i)}, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 \neq \sigma_2\} \quad (4)$$

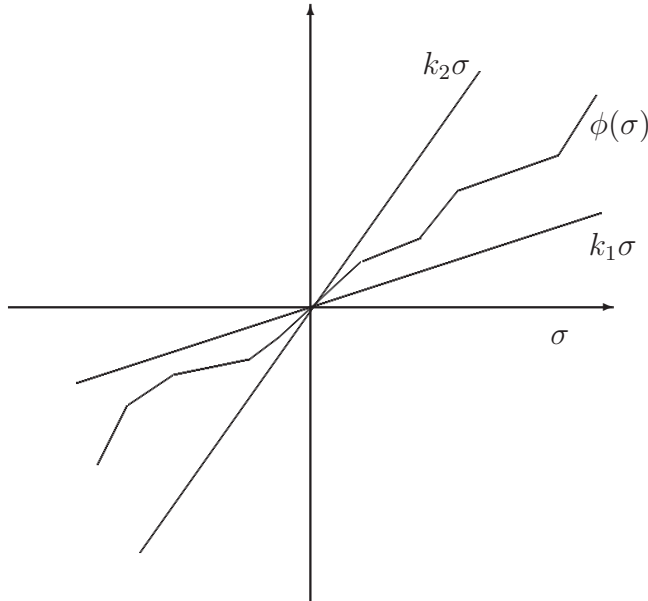


Figura 2: Nonlinearità statica monodimensionale delimitata da un settore.

In ogni caso si ha  $[k_1, k_2] \subseteq [k_1^{(i)}, k_2^{(i)}]$ .

Il problema della stabilità assoluta consiste nel determinare condizioni sufficienti su  $\Sigma_{LTI}$  e su  $\Phi_{[k_1, k_2]}$  in modo che  $x = 0$  sia un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile qualunque sia la  $\phi \in \Phi_{[k_1, k_2]}$ .

L'origine è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile se:

- è stabile, cioè:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tale che per } \|x(t_0)\| \leq \delta \text{ risulta } \|x(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

- $\delta$  può essere scelto in modo che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0 \quad \forall x(t_0) \text{ tale che } \|x(t_0)\| \leq \delta$$

Una condizione sufficiente per la globale asintotica stabilità è data dal criterio di Lyapunov: se  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile con continuità tale che:

- $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$
- $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} < 0, \quad \forall x \neq 0$
- $\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow V(x) \rightarrow +\infty$

allora l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

La stabilità asintotica dell'origine sarà studiata mostrando l'esistenza di opportune funzioni di Lyapunov candidate utilizzando la teoria dei sistemi passivi.

## 1.1 Well-posedness del problema

Le ipotesi di osservabilità e controllabilità ci assicurano che  $\{A, B, C, D\}$  è una realizzazione minima del sistema lineare, cui corrisponde una  $G(s)$  razionale propria. La funzione  $\phi(\cdot)$  deve essere tale che il sistema a ciclo chiuso possieda una soluzione unica: una condizione sufficiente affinché l'equazione  $\dot{x} = Ax - B\phi(Cx)$ , nel caso  $D = 0$ , abbia una soluzione unica è che la funzione  $\phi(\cdot)$  sia almeno Lipschitz in un intorno dello zero (condizione di esistenza ed unicità locale). Nel caso  $D \neq 0$  occorre aggiungere una condizione più restrittiva. Si deve verificare anche che la relazione ingresso-uscita

$$y = Cx + D\phi(y)$$

abbia una unica soluzione  $y = h(x)$ : se la funzione  $\phi(\cdot)$  è monotona si può dimostrare che  $y = Cx + D\phi(y)$  possiede un'unica soluzione  $y = h(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  [1].

La condizione di appartenenza ad un settore, che implica  $\phi(0) = 0$ , assicura che l'origine  $x = 0$  è un punto di equilibrio del sistema a ciclo chiuso.

## 1.2 Congetture di Aizerman e Kalman

### *Congettura di Aizerman*

Se il sistema lineare è asintoticamente stabile per ogni  $\phi(y) = ky$ ,  $k \in [k_1, k_2]$  allora l'origine del sistema a ciclo chiuso, mostrato in Figura 1, con una non linearità tempo invariante  $\phi \in \Phi_{[k_1, k_2]}$ , è asintoticamente stabile.

Aizerman congettura che se il vettore  $Ax + B\phi(y)$  è Hurwitz per ogni funzione lineare  $\phi(\cdot)$ , allora il punto  $x = 0$  può essere globalmente asintoticamente stabile per ogni funzione tale che il rapporto  $\phi(y)/y \in [k_1, k_2]$ .

### *Congettura di Kalman*

Se il sistema lineare è asintoticamente stabile per ogni  $\phi(y) = ky$ ,  $k \in [\bar{k}_1, \bar{k}_2]$  allora l'origine del sistema a ciclo chiuso, mostrato in Figura 1, con una non linearità tempo invariante  $\phi(\cdot)$  tale che  $\frac{d\phi}{dy}(y) \in \Phi_{[\bar{k}_1, \bar{k}_2]}$ , è asintoticamente stabile.

Kalman congettura che se il vettore  $Ax + B\phi(y)$  è Hurwitz per ogni funzione lineare  $\phi(\cdot)$ , allora il punto  $x = 0$  può essere globalmente asintoticamente stabile per ogni  $\phi(\cdot)$  continuamente differenziabile la cui pendenza rimane limitata in  $[\bar{k}_1, \bar{k}_2] \supseteq [k_1, k_2]$ .

Le due congetture sopra esposte possono essere viste come casi particolari di un problema più generale conosciuto nella letteratura di matematica applicata come *Marcus-Yamabe Conjecture (MYC)* [1] e, se fossero verificate, semplificherebbero molto l'analisi dei sistemi di controllo includenti non linearità. Purtroppo è stato dimostrato mediante controesempi [3] che queste congetture sono false. Occorre determinare altri criteri per ottenere condizioni sufficienti affinché il sistema di Figura 1 sia globalmente asintoticamente stabile.

Si noti che nella definizione di settore incrementale per  $\sigma_1 = 0$  si ottiene la definizione di settore utilizzata nella congettura di Aizerman, mentre per  $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$  si ottiene il settore relativo alla congettura di Kalman.

## 2 Sistemi passivi

La teoria della passività fornisce utili strumenti nello studio dei sistemi nonlineari legando la teoria di Lyapunov e la stabilità  $\mathcal{L}_2$ . Il principale risultato di questa teoria è il teorema

che afferma che la connessione in retroazione di due sistemi passivi è a sua volta passiva. Questa è una importante generalizzazione del fatto che una connessione in retroazione di due sistemi lineari stabili è ancora stabile se il guadagno di anello è minore di uno, o la fase complessiva minore di 180 gradi.

## 2.1 Funzioni non lineari senza memoria

Si consideri una funzione nonlineare scalare senza memoria  $y = \phi(u)$  dove  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rappresenta il legame ingresso uscita di un sistema statico. Si può definire il prodotto fra l'ingresso e l'uscita come la potenza assorbita dal sistema. Si può pensare, come esempio, ad un resistore in cui l'ingresso sia la corrente iniettata  $i$  e l'uscita la tensione  $v = Ri$  che si stabilisce ai suoi capi. Il prodotto ingresso-uscita è la potenza assorbita dal resistore:  $v \cdot i = Ri^2$ . Se il prodotto ingresso-uscita è positivo, come nel caso del resistore, il sistema si dice essere *passivo*.

Si può fornire una interpretazione geometrica alla proprietà di passività: la curva che rappresenta la funzione  $\phi$  deve essere nel I e III quadrante; ad esempio la nonlinearietà rappresentata in Figura 2 è passiva. Si può dire, quindi, che una funzione  $\phi$  è passiva, se  $\phi \in \Phi_{[0,\infty)}$ .

Può essere interessante estendere il concetto di passività a sistemi multiporte,  $y = \phi(u)$  dove  $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ . In questo caso, considerando il prodotto scalare  $u^T y$ , la funzione si dice passiva se  $u^T y \geq 0$ .

Nel caso in cui il prodotto  $u^T y = 0$  il sistema si dice senza perdite. Un esempio di sistema senza perdite è il trasformatore ideale in cui, dette rispettivamente  $v_1 = u_1$  e  $i_1 = y_1$  la tensione e la corrente al primario e  $v_2 = u_2$  e  $i_2 = y_2$  la tensione e la corrente al secondario si ha (applicando la convenzione dell'utilizzatore ad entrambe le porte):  $v_1 i_2 + v_2 i_1 = 0$  o, equivalentemente,  $u^T y = 0$ .

Se  $u^T y > 0$  per ogni  $u \neq 0$  la funzione si dice *input strictly passive*, perchè la passività è stretta nel senso che  $u^T y = 0$  solo se  $u = 0$ . Nel caso scalare questo implica che la curva non tocca l'asse delle ascisse, ad eccezione dell'origine. In maniera analoga la funzione si definisce *output strictly passive* se  $u^T y > 0$  per ogni  $y \neq 0$ , ovvero la passività è stretta nel senso che  $u^T y = 0$  solo se  $y = 0$  e nel caso scalare questo implica che la curva tocca l'asse delle ordinate esclusivamente nell'origine [2].

## 2.2 Sistemi dinamici

Definiamo la passività per i sistemi dinamici, rappresentati in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{cases} \quad (5)$$

dove  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  è localmente Lipschitz,  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  è continua,  $f(0, 0) = 0$  e  $h(0, 0) = 0$ . Il sistema ha lo stesso numero di ingressi e uscite. Il sistema si dice *passivo* rispetto ad una funzione di alimentazione  $s(t) = u^T y$  se l'energia assorbita in un qualsiasi intervallo di tempo  $[0, t]$  è maggiore o uguale dell'incremento dell'energia accumulata dal sistema nello stesso intervallo di tempo. Tale definizione è mutuata dalla teoria dei circuiti: in una rete elettrica composta da resistori, induttanze e condensatori l'energia accumulata nei condensatori e negli induttori è inferiore o, al più, uguale all'energia fornita dai generatori. Detta energia è pari all'integrale sul periodo considerato del prodotto fra la tensione applicata e la corrente erogata. Se si definisce la tensione come ingresso e la corrente come uscita (o

viceversa) si può dire che la rete elettrica (ovvero l'impedenza equivalente) è passiva rispetto all'alimentazione  $s(t) = v(t)i(t)$ . Il concetto di passività può essere esteso ad una rete multiporte se si applica ad ogni porta la definizione di ingresso e uscita vista. In tal caso la funzione di alimentazione è il prodotto scalare del vettore degli ingressi per il vettore delle uscite.

Astraendo dalla natura fisica del sistema si può definire passivo un sistema per cui

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq V(x(t)) - V(x(0)) \quad (6)$$

dove  $V(x)$  è la funzione energia (*storage function*) del sistema ed è semidefinita positiva e differenziabile con continuità. In alternativa si può dire che un sistema è passivo [2] se

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad (7)$$

Se si considera nelle (6)–(7) una funzione di alimentazione  $S(u, y)$  definita positiva, il sistema si definisce *dissipativo* rispetto alla funzione di alimentazione  $S$ .

Tralasciando ulteriori e particolari definizioni vale la pena ricordare che un sistema si dice

- *senza perdite* se  $u^T y = \dot{V}$
- *strettamente passivo* se  $u^T y \geq \dot{V} + \psi(x)$ , con  $\psi(x)$  definita positiva sempre per ogni  $(x, u)$

Se il sistema è lineare tempo invariante può essere espresso in forma di stato dalla (1) o equivalentemente dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Una funzione di trasferimento  $G(s)$  è detta *reale positiva* (PR) se [1]:

1.  $G(s)$  è analitica in  $Re(s) > 0$
2.  $G(s)$  è reale per  $s$  reale positiva
3.  $Re[G(s)] \geq 0$  per ogni  $Re(s) > 0$

Per i sistemi lineari tempo invarianti passivi si ha quindi che:

$$Re[G(s)]|_{s=j\omega} \geq 0 \quad \forall \omega \in ]-\infty, +\infty[ \quad (8)$$

La condizioni necessarie e sufficienti per caratterizzare una funzione di trasferimento in termini di positività/passività sono date dal seguente *Positive Real Lemma* [1]:

**Lemma 1 (Positive Real Lemma o Kalman–Yakubovic–Popov Lemma)** *Si consideri il sistema (1). Si assuma controllabile ed osservabile. La sua funzione di trasferimento*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

*con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è Reale Positiva (PR) se e solo se esistono delle matrici  $P = P^T > 0$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tali che:*

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -LL^T \\ PB - C^T &= -LW \\ D + D^T &= W^T W \end{aligned} \quad (9)$$

La prima versione del KYP Lemma fu pubblicata da Yakubovic [4] nel 1962, con  $D = 0$ .

Le equazioni (9) possono essere riscritte in forma di disequaglianza matriciale (*Linear Matrix Inequality LMI*):

$$\begin{bmatrix} -PA - A^T P & C^T - PB \\ C - B^T P & D + D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ W^T \end{bmatrix} [ L \quad W^T ] \geq 0 \quad (10)$$

Si arriva a tale risultato considerando come funzione energia

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x \quad (11)$$

ed operando le opportune sostituzioni nella (7). L'importanza di questo lemma risiede nel legame fra la reale positività di una funzione e l'esistenza di una opportuna funzione di Lyapunov.

### 3 Interconnessione di sistemi

Per lo studio della stabilità dei sistemi interconnessi è conveniente usare il formalismo della stabilità ingresso-uscita, nello spazio  $\mathcal{L}_2$  delle funzioni a quadrato sommabile, ovvero ad energia finita. Si interpreta un sistema come un mappa, o operatore,  $y = H(u)$ , che lega l'uscita  $y$  all'ingresso  $u$ , segnale che mappa l'intervallo  $[0, +\infty)$  nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^m$ . Un sistema si dice stabile  $\mathcal{L}_2$  con guadagno finito se esistono delle costanti  $\gamma$  e  $\beta$  tali che

$$\|H(u)\|_2 \leq \gamma \|u\|_2 + \beta \quad (12)$$

per ogni  $u \in \mathcal{L}_2$ . Quando il valore di  $\gamma$  è ben definito esso è chiamato guadagno del sistema. Se la disuguaglianza (12) è soddisfatta per ogni  $u \in \mathcal{L}_2$  con  $\sup_{t \in [0, +\infty)} \|u(t)\| \leq r$  la mappa  $H$  si dice stabile  $\mathcal{L}_2$  per piccoli segnali con guadagno finito [2].

Si considerino due generici sistemi scalari  $H_1$  e  $H_2$ , entrambi stabili  $\mathcal{L}_2$  con guadagno finito, connessi in retroazione come in Figura 4, con le ipotesi:

1. il sistema è ben definito, cioè dati  $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_2$  esiste una soluzione unica anche essa ad energia finita,  $(u_1, u_2, e_1, e_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}_2)$
2. gli operatori sono limitati incrementalmente in senso  $\mathcal{L}_2$ :

$$\|H_i(\sigma_2) - H_i(\sigma_1)\|_2 \leq r_i \|\sigma_2 - \sigma_1\|_2 \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

3.  $H_i(0) = 0, \quad i = 1, 2.$

I legami ingresso-uscita:

$$\begin{cases} e_1 = u_1 - H_2(e_2) \\ e_2 = u_2 + H_1(e_1) \\ y_1 = H_1(e_1) \\ y_2 = H_2(e_2) \end{cases} \quad (14)$$

possono essere riscritti come una mappa  $T$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T((e_1, e_2), (u_1, u_2)) \quad (15)$$

Si dimostra (*teorema del piccolo guadagno*) che se



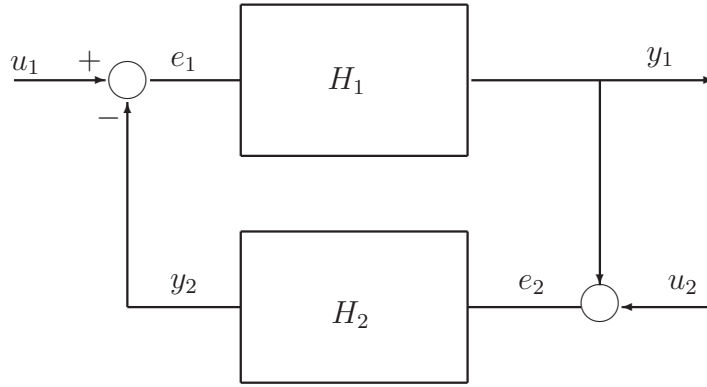


Figura 3: Retroazione di sistemi.

- il prodotto  $r_1 r_2 < 1$
- la mappa ingresso-uscita soddisfa la condizione (13)

allora

$$\begin{aligned}\|y_1\| &\leq a_{11}\|u_1\| + a_{12}\|u_2\| \\ \|y_2\| &\leq a_{21}\|u_1\| + a_{22}\|u_2\|\end{aligned}$$

la mappa  $T$  è una contrazione

$$|T(x_2) - T(x_1)| \leq \gamma|x_2 - x_1|, \quad \text{con } \gamma = r_1 r_2 < 1 \quad (16)$$

ed il sistema è stabile  $\mathcal{L}_2$ .

Se consideriamo il caso particolare in cui  $H_1$  rappresenta un sistema lineare tempo invariante ed  $H_2$  un generica non linearità appartenente ad un settore, vogliamo determinare le condizioni per cui  $H_1$  e  $H_2$  soddisfano la (13) ed, in definitiva, il teorema del piccolo guadagno.

Analizziamo prima il sistema lineare e vediamo come stimare  $r_1$ . Per la linearità si ha:

$$\frac{\|H(\sigma_2) - H(\sigma_1)\|_2}{\|\sigma_2 - \sigma_1\|_2} = \frac{\|H(\sigma_2 - \sigma_1)\|_2}{\|\sigma_2 - \sigma_1\|_2} \leq \|H(\cdot)\|_\infty \quad (17)$$

Per determinare  $r_2$  tale che la funzione non lineare soddisfi la (13) consideriamo la definizione di norma  $\mathcal{L}_2$ :

$$\begin{aligned}\|H(\sigma_2) - H(\sigma_1)\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} |H(\sigma_2) - H(\sigma_1)|^2 dt \\ &\leq r^2 \int_0^{+\infty} |\sigma_2 - \sigma_1|^2 dt = r^2 \|\sigma_2 - \sigma_1\|_2^2\end{aligned} \quad (18)$$

la condizione espressa dalla (18) è equivalente alla condizione di appartenenza ad un settore incrementale delimitato dalle rette  $y = -r\sigma$  e  $y = r\sigma$ .

Possiamo, in definitiva, dire che se  $\|H_1(s)\|_\infty \cdot r_2 < 1$  il sistema a ciclo chiuso è stabile  $\mathcal{L}_2$ .

## 4 Criterio del cerchio

Il criterio del cerchio consente di studiare la stabilità assoluta utilizzando solamente il diagramma di Nyquist di  $G(j\omega)$ . Dato il diagramma possono essere determinati facilmente i settori ammissibili per i quali l'origine è assolutamente stabile. Si mostrerà solo il caso in cui la funzione non lineare appartiene al settore  $[0, +\infty)$  in quanto è sempre possibile riportarsi a questo caso operando delle opportune trasformazioni, come descritte nel prossimo paragrafo. Si analizzerà prima il caso del settore  $[0, k]$ , valutando in seguito come varia il risultato facendo tendere  $k$  ad infinito.

### 4.1 Loop transformation

Si vuole mostrare che è sempre possibile, tramite opportune trasformazioni, ricondursi allo studio delle nonlinearità appartenenti al settore  $[0, +\infty)$ , potendo così limitarsi allo studio delle proprietà dei sistemi passivi.

Si consideri il sistema di Figura 1 con  $\Sigma_{LTI}$  descritto dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  e con  $\phi \in \Phi_{[k_1, k_2]}$ . Si effettuino le trasformazioni descritte nella Figura 4 che vengono indicate come *loop transformation* [2].

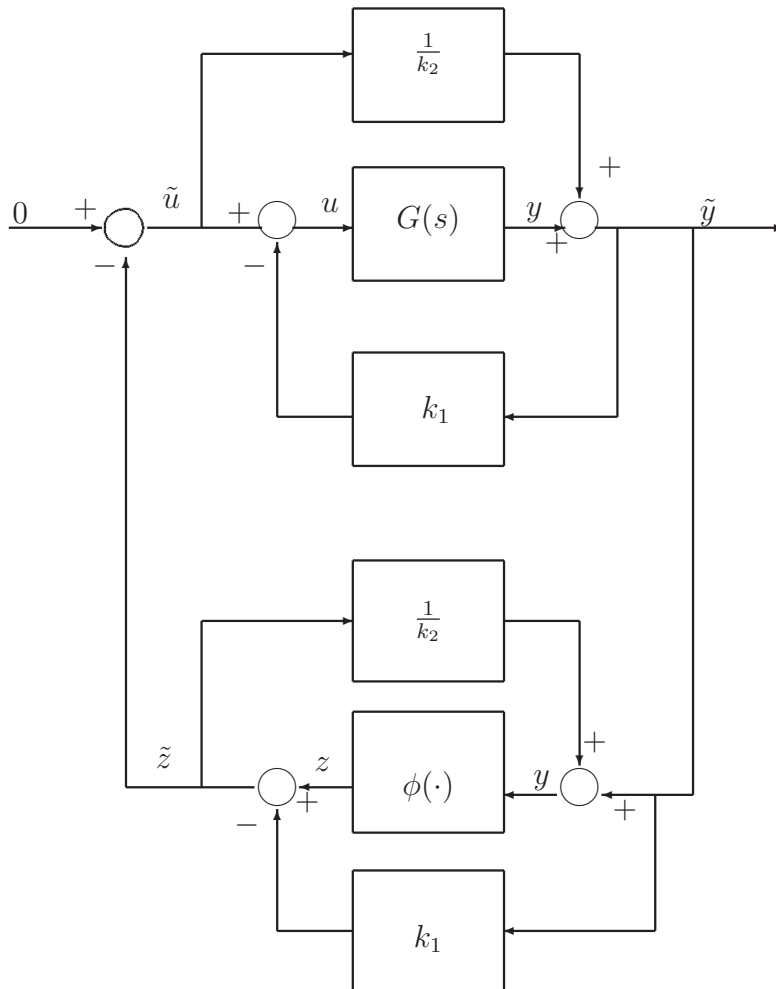


Figura 4: Trasformazioni che consentono il cambiamento di settore.

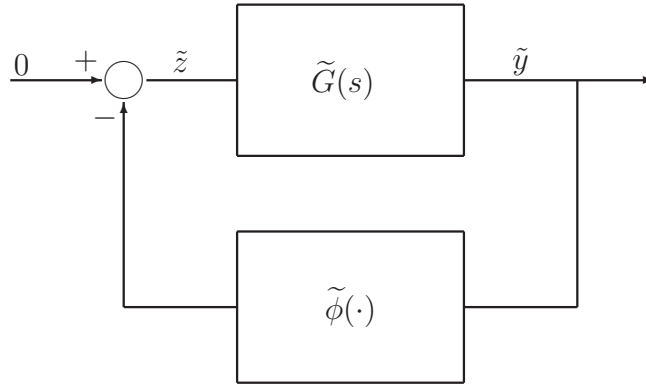


Figura 5: Sistema a ciclo chiuso nelle variabili trasformate.

Si ottiene un nuovo sistema a ciclo chiuso, rappresentato in Figura 5 che si dimostra essere equivalente allo schema di partenza. Il sistema lineare equivalente è:

$$\tilde{G} = \frac{G}{1 + k_1 G} + \frac{1/k_2}{1 + k_1 G} \quad (19)$$

Per la funzione nonlineare si verifica facilmente che:

$$\begin{cases} z = k_1 \tilde{y} + \tilde{z} \\ y = \tilde{y} + (1/k_2) \tilde{z} \end{cases} \quad (20)$$

In termini matriciali:

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 1/k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Essendo chiaramente  $k_1 \neq k_2$ , la trasformazione è invertibile e quindi gli schemi di Figura 1 e Figura 5 sono equivalenti.

Possiamo vedere come si modifica il settore con la loop transformation introdotta. In altri termini se

$$k_1 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq k_2 \quad (22)$$

vogliamo vedere a quale settore appartiene  $\frac{\tilde{\phi}(\tilde{y})}{\tilde{y}}$ .

Basta considerare l'inversa della relazione (21):

$$\begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - k_1/k_2} \begin{pmatrix} 1 & -1k_1 \\ -1/k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \quad (23)$$

Se consideriamo il rapporto  $\frac{\tilde{\phi}(\tilde{y})}{\tilde{y}} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{y}}$  in funzione di  $\frac{\phi(y)}{y} = \frac{z}{y}$  otteniamo

$$\frac{\tilde{\phi}(\tilde{y})}{\tilde{y}} = \frac{-k_1 + \frac{\phi(y)}{y}}{1 - \frac{1}{k_2} \frac{\phi(y)}{y}} \quad (24)$$

da cui si evince che il settore di partenza è stato trasformato nel settore  $\Phi_{[0,+\infty)}$ , e la non linearità equivalente è passiva.

Si noti che la relazione (24) vale anche nel caso dei settori incrementali, cioè se  $\phi(\cdot) \in \Phi_{[k_1, k_2]}^{(i)}$  attraverso la loop transformation si avrà che  $\tilde{\phi}(\cdot)$  apparterrà  $\Phi_{[0,+\infty)}^{(i)}$

Nella trasformazione di Figura 4 spesso è utile considerare, invece di  $k_2$ ,

$$\bar{k}_2 = \frac{k_2}{1 - \epsilon}$$

in modo da ottenere  $\tilde{\phi} \in \Phi_{[0, k]}$ , con

$$k = \frac{-k_1 + k_2}{\epsilon}$$

Scegliendo  $\epsilon$  piccolo a piacere si può avere un  $k$  elevato, ma finito.

## 4.2 Dal piccolo guadagno al cerchio

Si consideri il sistema di Figura 5. Per poter applicare il teorema del piccolo guadagno occorre che la non linearità appartenga al settore  $[-r_2, r_2]$ ; pertanto, ponendo  $r_2 = k/2$ , occorre effettuare le loop transformation di Figura 6 che permettono di passare dal settore  $\Phi_{[0, k]}$  al settore  $\Phi_{[-k/2, k/2]}$ .

Sotto queste ipotesi si vede che la condizione  $\|H_1(s)\|_\infty \cdot r_2 < 1$  si può riscrivere

$$\left\| \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \frac{k}{2}\tilde{G}(s)} \right\|_\infty \cdot \frac{k}{2} < 1 \Leftrightarrow \left\| \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \frac{k}{2}\tilde{G}(s)} \right\|_\infty < \frac{2}{k} \quad (25)$$

che, valutata per  $s = j\omega$ , diventa:

$$\left| \frac{\tilde{G}(j\omega)}{1 + \frac{k}{2}\tilde{G}(j\omega)} \right| \cdot \frac{k}{2} < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{X^2 + Y^2}{(1 + \frac{k}{2}X)^2 + Y^2} < \frac{4}{k^2} \quad (26)$$

con  $X = Re[\tilde{G}(j\omega)]$  e  $Y = Im[\tilde{G}(j\omega)]$ .

Si è ottenuta quindi una condizione sufficiente per la stabilità assoluta individuando nel piano di Nyquist una regione cui deve appartenere il diagramma di  $G(j\omega)$ : il soddisfacimento della (26) equivale a dire che

$$Re[\tilde{G}(j\omega)] + 1/k > 0$$

ovvero che la funzione  $\tilde{G}(s) + 1/k$  deve essere strettamente reale positiva.

Per  $k \rightarrow \infty$  si ha che se la  $\tilde{G}(s)$  è strettamente reale positiva e  $\tilde{\phi} \in \Phi_{[0,+\infty)}$  allora l'origine del sistema è globalmente asintoticamente stabile.

Se si considera il sistema di partenza con  $\phi \in \Phi_{[k_1, k_2]}$  si vede che la (26) è l'equazione di una circonferenza che interseca l'asse delle ascisse del piano di Nyquist nei punti  $(-1/k_1, j0)$  e  $(-1/k_2, j0)$  arrivando alla formulazione classica del criterio del cerchio [1].

## 5 Criterio di Popov

Il criterio del cerchio non può essere applicato a funzioni di trasferimento con poli nell'origine, poiché si riferisce solo a funzioni strettamente reali positive. Un'altra condizione sufficiente

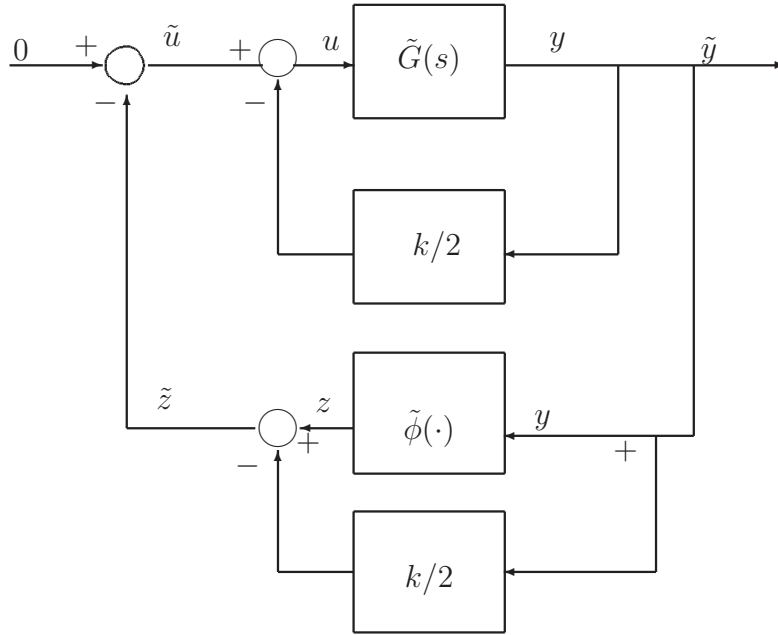


Figura 6: Trasformazione dal settore  $\Phi_{[0,k]}$  al settore  $\Phi_{[-k/2,k/2]}$ .

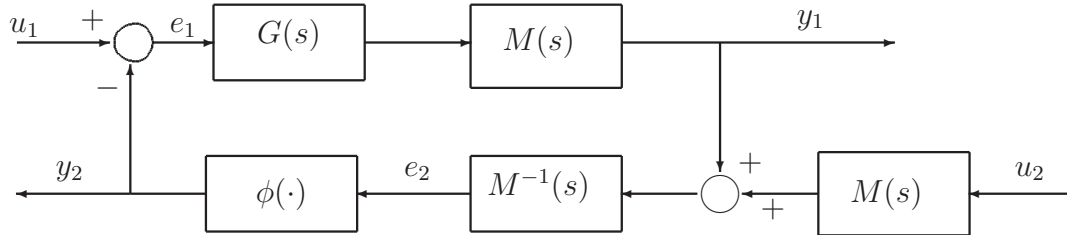


Figura 7: Moltiplicatore di Popov.

per la stabilità assoluta può essere ottenuta modificando l'anello di controllo come mostrato in Figura 7.

Con un opportuno moltiplicatore  $M(s)$  si ha che il blocco  $M^{-1}(s)\phi$  appartiene al settore  $[0, +\infty)$ . Il moltiplicatore di Popov è  $M(s) = 1 + qs$ .

Applicando il criterio  $\|H_1(s)\|_\infty \cdot r_2 < 1$  si ottiene il *criterio di Popov*:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)(1 + q \cdot j\omega)] > 0 \quad (27)$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland, *Dissipative Systems, Analysis and Control - Theory and Applications*, 2nd ed. London, UK: Springer-Verlag, 2007.
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice Hall, 2002.
- [3] A. Cima, A. Gasull, E. Hubbers, and F. Manosas, "A polynomial counterexample to the Marcus-Yamabe Conjecture," *Advances in Mathematics*, vol. 131, pp. 453-457, 1997.
- [4] V. A. Yakubovic, "The solution of certain matrix inequalities," *Automat. Control Theory Sov. Math. AMS*, vol. 3, no. 6, pp. 620-623, 1962.