
Intersezione di due sottospazi vettoriali

Marcello Colozzo

Siano V_1 e V_2 i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ generati rispettivamente dai seguenti sistemi di vettori:

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \quad \Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \quad (1)$$

essendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, 1, -1), \quad \mathbf{u}_2 = (2, -1, 1) \\ \mathbf{v}_1 &= (1, 2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, -1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

Determinare una base di $V_1 \cap V_2$ e $\dim(V_1 + V_2)$.

Soluzione

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in V_1 \cap V_2 &\iff \mathbf{x} \in V_1, \quad \mathbf{x} \in V_2 \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 \\ &\iff (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 + 2\mu_2, \lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 - \mu_2, -\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - 2\mu_2) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

ovvero il sistema lineare omogeneo nelle incognite $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 + 2\mu_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - 2\mu_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

La soluzione banale $(0, 0, 0, 0)$ individua il vettore nullo. Tale soluzione è ovvia, giacché per una nota proprietà il vettore nullo è comunque un elemento di un qualunque sottospazio vettoriale. Ne consegue che dobbiamo ricercare soluzioni non nulle (le cosiddette *autosoluzioni* o *soluzioni proprie*). A tale scopo osserviamo che il minore estratto dalla matrice A dei coefficienti, cancellando l'ultima colonna è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

per cui $\rho(A) = 3 \implies \exists \infty^1$ autosoluzioni. Il sistema equivale a

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 = -2\alpha \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 = \alpha \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 = 2\alpha \end{cases}, \quad \mu_2 = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Segue

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} -2\alpha & 2 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \\ 2\alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \alpha & -1 & 2 \\ 2\alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -2\alpha & -1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \mu_1 &= 2\alpha + \lambda_1 = \alpha \end{aligned}$$

Cioè

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (-\alpha, 0, \alpha, \alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (5)$$

onde

$$\mathbf{x} = -\alpha \mathbf{u}_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

In altri termini, ogni vettore di $V_1 \cap V_2$ si esprime univocamente come combinazione lineare di $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1\} \implies \mathcal{B}$ è una base di $V_1 \cap V_2$, per cui

$$\dim(V_1 \cap V_2) = 1 \quad (7)$$

La dimensione della somma $V_1 + V_2$ si ricava dalla **formula di Grassmann** :

$$\underbrace{\dim V_1}_{=2} + \underbrace{\dim V_2}_{=2} = \dim(V_1 + V_2) + \underbrace{\dim(V_1 \cap V_2)}_{=1} \implies \dim(V_1 + V_2) = 3 \quad (8)$$