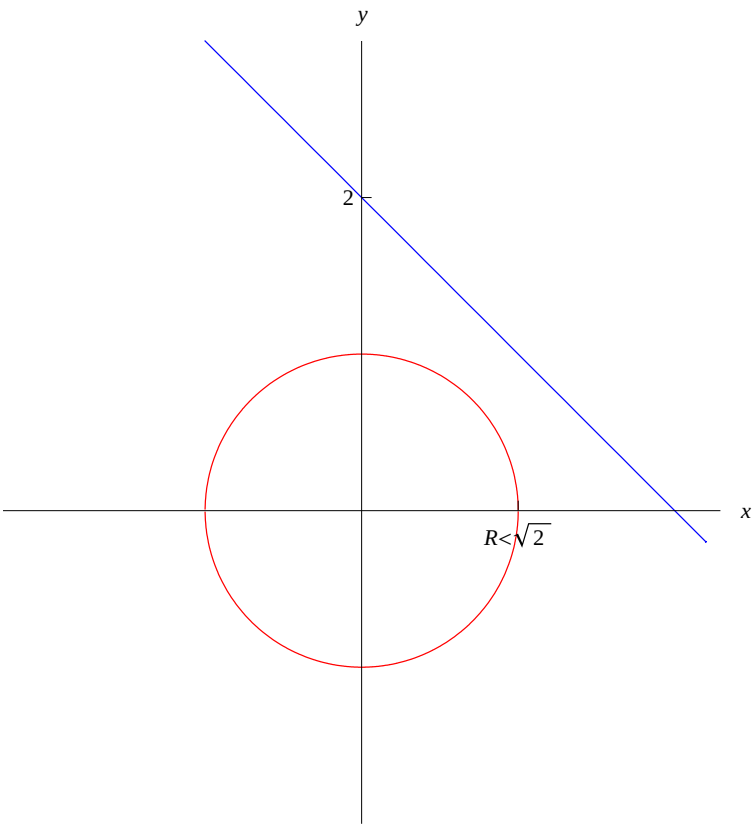
MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Matematica – 2018

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Ampliamento complesso di uno spazio euclideo n-dimensionale

Marcello Colozzo



Indice

1 Punti reali e punti immaginari **5**
1.1 Introduzione 5
1.2 Elementi immaginari 9
1.3 Coniugio 13

2 Vettori complessi **15**
2.1 Condizione di parallelismo 18
2.2 Prodotto scalare 19
2.3 Condizione di ortogonalità 20

3 Rette e piani dello spazio complesso **21**
3.1 Rappresentazione del piano 21
3.2 Rappresentazione della retta 23
3.2.1 Rappresentazione ordinaria 23
3.2.2 Rappresentazione parametrica 24
3.2.3 Rapporti uguali 25
3.3 Piani e rette immaginari 26

4 Isotropia **37**
4.1 Vettori isotropi 37
4.2 Retta isotropa 40
4.3 Piano isotropo 49

5 Ampliamento complesso del piano euclideo **61**
5.1 Il piano complesso 61

6 Esercizi svolti **63**
6.1 Piani e rette immaginari 63
6.2 Vettori isotropi 92
6.3 Rette isotrope 94
6.4 Piani isotropi 95
Bibliografia 115

Capitolo 1

Punti reali e punti immaginari

1.1 Introduzione

L'ampliamento complesso (o *complessificazione*) di uno spazio euclideo n-dimensionale (o di uno spazio affine) permette di formulare una geometria analitica sulla falsariga di quella relativa allo spazio reale. Inoltre, tale ampliamento dà luogo a nuovi enti geometrici, come: vettori isotropi, rette isotrope, piani isotropi, coni isotropi. Si tratta di *elementi immaginari* utilizzati in alcuni rami dell'analisi matematica (teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali) e in elettrodinamica classica (stati di polarizzazione circolare di un'onda elettromagnetica piana e monocromatica).

In questo paragrafo proponiamo un esempio che giustifica l'esigenza della complessificazione.

Esempio 1 *In un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxy)$ sia data la circonferenza Γ centrata nell'origine e di raggio R, onde la sua equazione si scrive:*

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ci proponiamo di determinare le coordinate cartesiane dei punti di intersezione di Γ con la retta

$$r : y = -x + 2,$$

assumendo R come parametro reale positivo. Si tratta di risolvere il seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}, \tag{1.1}$$

da cui ricaviamo

$$x = 1 \pm \sqrt{\frac{R^2 - 2}{2}}$$

Dobbiamo distinguere i seguenti casi:

1. $R^2 - 2 > 0 \underset{R>0}{\Longleftrightarrow} R > \sqrt{2}$
2. $R^2 - 2 = 0 \underset{R>0}{\Longleftrightarrow} R = \sqrt{2}$
3. $R^2 - 2 < 0 \underset{R>0}{\Longleftrightarrow} 0 < R < \sqrt{2}$

Nel caso 1 esistono due soluzioni reali e distinte:

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}$$

Dalla seconda delle (1.1) possiamo determinare le ordinate y_1 e y_2 dei punti di intersezione, ottenendo:

$$y_1 = 1 + \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}$$

Ne consegue che per $R > \sqrt{2}$, la retta r interseca la circonferenza Γ in due punti distinti:

$$P_1\left(1 - \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}\right), \quad P_2\left(1 + \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{R^2-2}{2}}\right),$$

come illustrato in fig. 1.1.

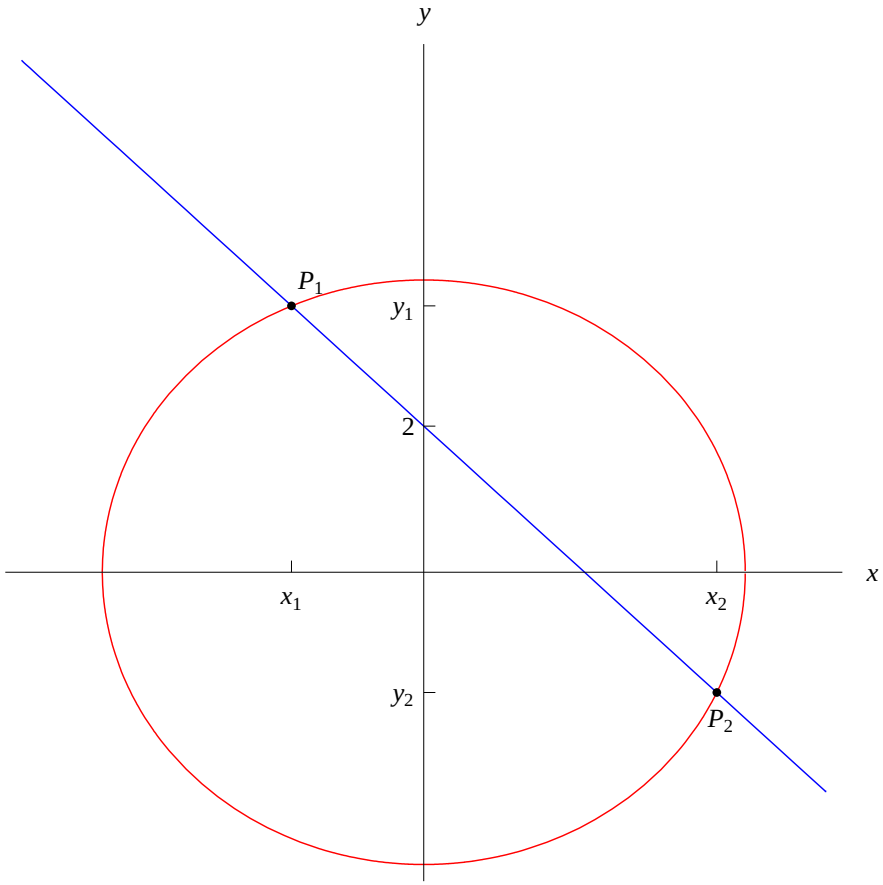


Figura 1.1: Se il raggio R della circonferenza $\Gamma : x^2 + y^2 = R^2$ è tale che $R > \sqrt{2}$, la retta $r : y = -x + 2$ interseca Γ in due punti distinti.

Nel caso 2 abbiamo due soluzioni reali e coincidenti:

$$x = 1$$

La corrispondente ordinata è $y = 1$. Quindi r è tangente a Γ nel punto $P(1,1)$ come illustrato in fig. 1.2.

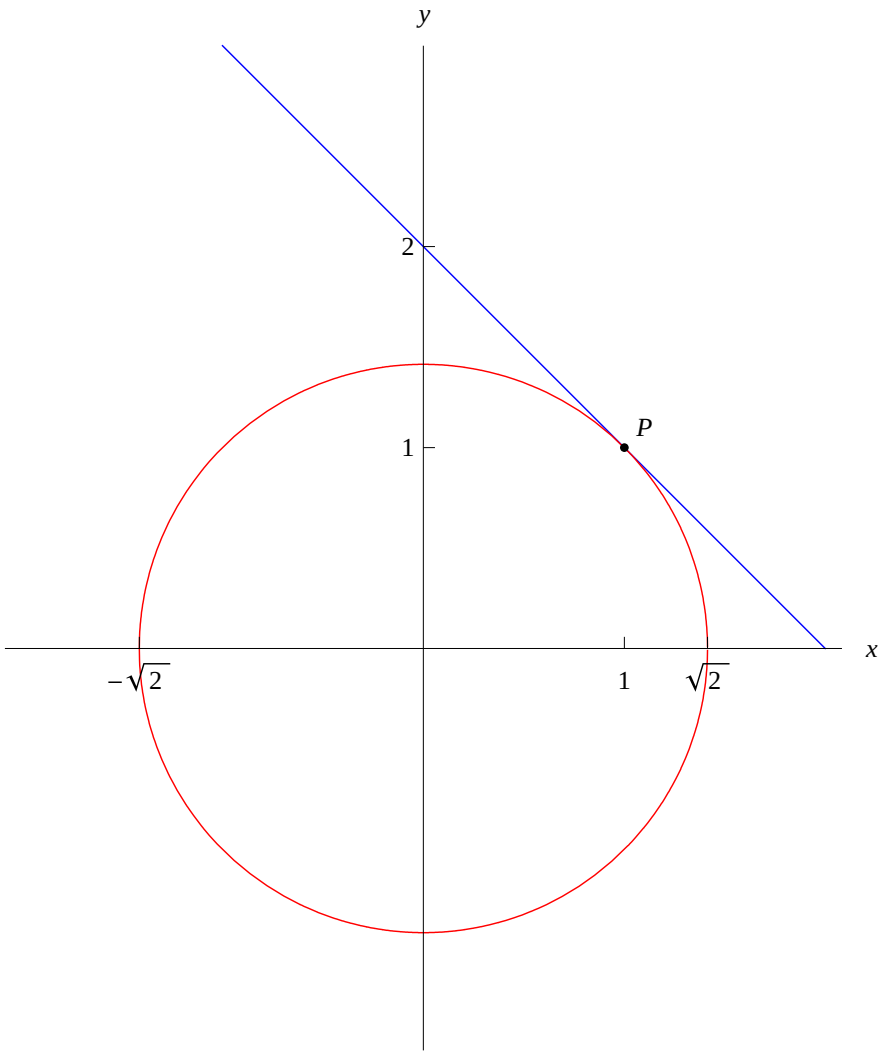


Figura 1.2: Per $R = \sqrt{2}$ la retta r è tangente a Γ in $P\,(1,1)$.

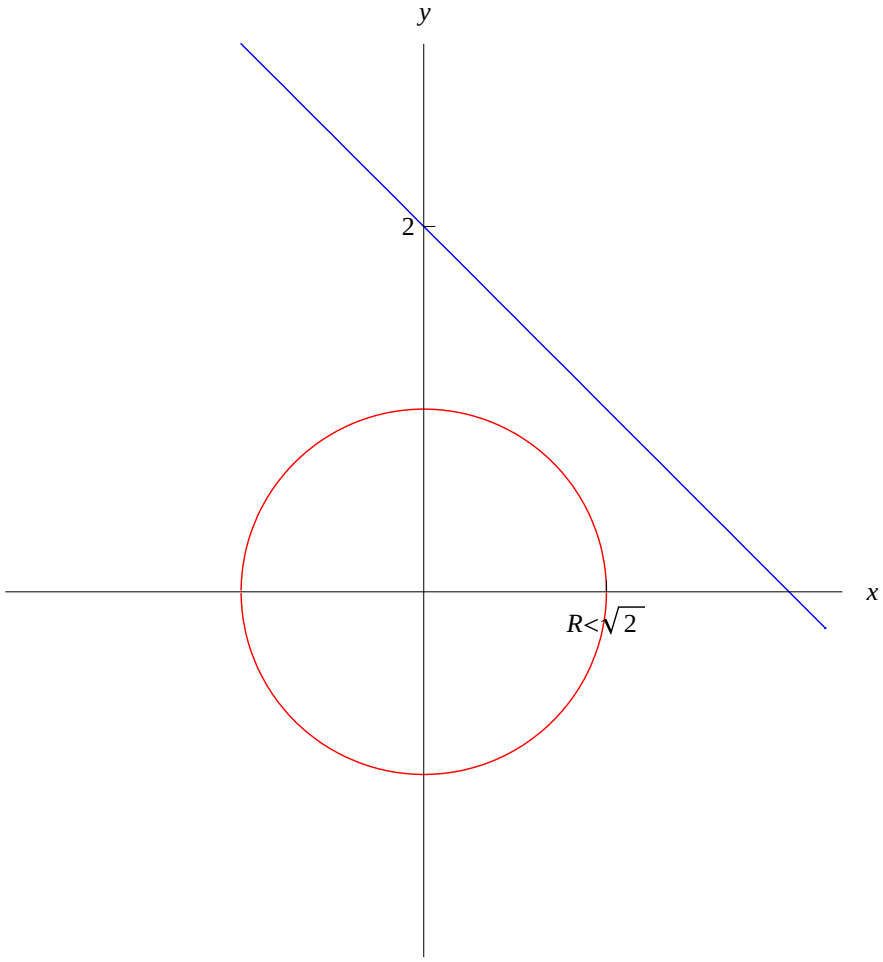


Figura 1.3: Per $R < \sqrt{2}$ la retta non interseca la circonferenza.

Infine, nel caso 3 il sistema (1.1) non ammette soluzioni reali, per cui la retta non interseca la circonferenza come illustrato in fig. 1.3.

Più precisamente, abbiamo due radici complesse coniugate:

$$x_1 = 1 - i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}, \quad x_2 = 1 + i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}, \tag{1.2}$$

da cui possiamo ricavare - tramite la seconda delle (1.1) - le ordinate:

$$y_1 = 1 + i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}, \quad y_2 = 1 - i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}$$

A questo punto appare chiaro che le radici complesse coniugate (1.2) suggeriscono un'estensione dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ in modo da poter asserire che per $R < \sqrt{2}$ la retta r interseca la circonferenza Γ nei punti immaginari:

$$P_1\left(1 - i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}, 1 + i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}\right), \quad P_2\left(1 + i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}, 1 - i\sqrt{\frac{2-R^2}{2}}\right)$$

***

A rigore avremmo dovuto elaborare la complessificazione di uno spazio affine, seguita da quella di uno spazio euclideo. Per non appesantire la trattazione, ci siamo riferiti esclusivamente allo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, cioè l'insieme delle terne ordinate di numeri reali strutturato come spazio vettoriale in cui è definito un prodotto scalare.

1.2 Elementi immaginari

Definizione 2

$$\left.\begin{array}{r}\textit{La terna ordinata } (\xi,\eta,\zeta) \textit{ è} \\ \textit{una } \textbf{\textit{terna immaginaria}}\end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \xi,\eta,\zeta \in \mathbb{C}$$

Ad esempio, $\left(i-2, \sqrt{3}, i\right)$ e $(0, 2+i, 0)$ sono terne immaginarie, mentre $(5, \pi, -1)$ è una terna reale. Se $\mathcal{R}(Oxyz)$ è un qualunque riferimento cartesiano (non necessariamente ortogonale) dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, possiamo definire l'insieme

$$I = \{((\xi,\eta,\zeta), \mathcal{R})\} \tag{1.3}$$

Cioè I è l'insieme di tute e sole le coppie ordinate costituite dalle terne immaginarie e dai riferimenti cartesiani dello spazio ordinario [1]. Quindi

$$m, m' \in I \Longleftrightarrow m = ((\xi,\eta,\zeta), \mathcal{R}), \quad m' = ((\xi',\eta',\zeta'), \mathcal{R}')$$

Come è noto, il passaggio da $\mathcal{R}(Oxyz)$ a $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ si realizza attraverso le formule di trasformazione che possono essere scritte in forma operatoriale

$$\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \hat{A}\mathbf{x}, \tag{1.4}$$

dove $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}' = (x', y'.z')$ sono i vettori posizione di un generico punto dello spazio ordinario e $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ è il vettore posizione dell'origine O' di $\mathcal{R}'$ nel riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, mentre $\hat{A} \in End(\mathbb{R}^3)$ cioè è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ (fig. 1.4).

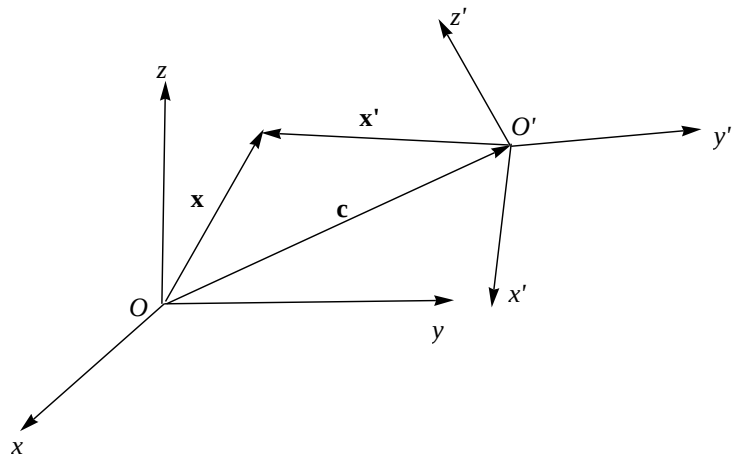


Figura 1.4: Passaggio dal riferimento cartesiano $\mathcal{R}\,(Oxyz)$ al riferimento $\mathcal{R}'\,(O'x'y'z')$. Si noti che $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ non sono necessariamente ortogonali.

Denotando con $A = (a_{ij})$ la matrice (reale) rappresentativa di $\hat{A}$ nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha che la (1.4) può essere scritta in forma matriciale

$$X' = C + AX, \tag{1.5}$$

essendo

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

In particolare l'endomorfismo $\hat{A}$ è invertibile, per cui è un automorfismo e denotiamo con $\hat{A}^{-1}$ il suo inverso: $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = 1$. Come è noto, in tal caso la matrice rappresentativa di $\hat{A}$ in una qualunque base è un elemento del gruppo lineare $GL(3, \mathbb{R})$, i.e. $\det A \neq 0$. Scriviamo per esteso la (1.5):

$$\begin{cases} x' = c_1 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = c_1 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = c_1 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \tag{1.6}$$

L'invertibilità di $\hat{A}$ implica l'invertibilità della (1.4). Infatti moltiplicando primo e secondo membro (da sinistra) della (1.4)

$$\hat{A}^{-1}\mathbf{x}' = \hat{A}^{-1}\mathbf{c} + \hat{A}^{-1}\hat{A}\mathbf{x},$$

onde

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}' + \hat{A}^{-1}\mathbf{x}', \tag{1.7}$$

dove $\mathbf{c}' \overset{def}{=} -\hat{A}^{-1}\mathbf{c}$ è il vettore che definisce le coordinate (nel riferimento $\mathcal{R}'$) dell'origine O del riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.

Assegnato un insieme $S \neq \emptyset$, una *relazione* in S è una corrispondenza di S in sé, cioè una legge

$$\begin{aligned} &\rho : S \to \mathcal{P}(S) \\ &\rho : s \to \rho(s), \quad \forall s \in S, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{P}(S)$ è l'insieme delle parti di S. Scriviamo

$$s\rho s' \overset{def}{\Longleftrightarrow} s' \in S' = \rho(s),$$

dicendo che s è in relazione con s'. Ciò premesso, se $m = (\boldsymbol{\xi}, \mathcal{R}) \in I$, $m' = (\boldsymbol{\xi}', \mathcal{R}') \in I$, dove $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ e $\boldsymbol{\xi}' = (\xi', \eta', \zeta')$, consideriamo la seguente relazione in I

$$m\omega m' \Longleftrightarrow \boldsymbol{\xi}' = \mathbf{c} + \hat{A}\boldsymbol{\xi}, \tag{1.8}$$

La (1.8) è ben posta, giacchè

$$\omega(m) = \left\{ (\boldsymbol{\xi}', \mathcal{R}') \in I \mid \boldsymbol{\xi}' = \mathbf{c} + \hat{A}\boldsymbol{\xi} \right\} \subseteq I \Longrightarrow \omega(m) \in \mathcal{P}(I)$$

La relazione ω così definita verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà riflessiva**
   $\forall m \in I, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} + \hat{0}\mathbf{0} \Longrightarrow m\omega m$
   Qui $\hat{0}$ denota l'endomorfismo nullo.

2. **Proprietà simmetrica**
   $m\omega m' \Longleftrightarrow \boldsymbol{\xi}' = \mathbf{c} + \hat{A}\boldsymbol{\xi} \underset{\text{eq. (1.7)}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{c}' + \hat{A}^{-1}\boldsymbol{\xi}' \Longleftrightarrow m'\omega m, \ \ \forall m, m' \in I$

3. **Proprietà transitiva**

$$m\omega m' \Longleftrightarrow \boldsymbol{\xi}' = \mathbf{c} + \hat{A}\boldsymbol{\xi}$$
$$m'\omega m'' \Longleftrightarrow \boldsymbol{\xi}'' = \mathbf{c}' + \hat{A}'\boldsymbol{\xi}',$$

   per cui

$$\boldsymbol{\xi}'' = \mathbf{c}' + \hat{A}'\left(\mathbf{c} + \hat{A}\boldsymbol{\xi}\right)$$

   Tenendo conto della linearità di $\hat{A}'$ e della definizione di prodotto di endomorfismi:

$$\boldsymbol{\xi}'' = \mathbf{c}' + \hat{A}'\mathbf{c} + \left(\hat{A}'\hat{A}\right)\boldsymbol{\xi}$$

   Ponendo $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}' + \hat{A}'\mathbf{c}$ e $\hat{A}'' = \hat{A}'\hat{A}$, si ha

$$\boldsymbol{\xi}'' = \mathbf{c}'' + \hat{A}''\boldsymbol{\xi} \Longrightarrow m\omega m''$$

Le proprietà 1, 2, 3 implicano che ω è una relazione di equivalenza in I, per cui restano definite le classi di equivalenza

$$[m] = \{m' \in I \mid m'\omega m\}, \tag{1.9}$$

che partizionano I determinando l'insieme quoziente

$$I/\omega \overset{def}{=} \mathcal{I} = \{[m] \mid [m] \text{ è una classe di equivalenza}, \ \ \forall m \in I\}$$

Notiamo che per la proprietà riflessiva riesce $m \in [m]\,, \ \forall m \in I$.

Definizione 3 *Dicesi* ***punto immaginario*** *una classe di equivalenza (1.9), cioè un elemento* $[m] \in \mathcal{I}$.

Definizione 4 *Dicesi* ***spazio complesso*** *l'insieme*

$$\mathbb{R}^{3*} = \mathbb{R}^3 \cup \mathcal{I} \tag{1.10}$$

Un ***punto complesso*** *è un qualunque elemento dello spazio complesso.*

Osservazione 5 *Un punto immaginario è un elemento di* $\mathcal{I} = I/\omega$, *mentre un punto complesso è un elemento di* $\mathbb{R}^{3*}$ *dato dalla (1.10). Ne consegue che un punto reale è un particolare punto complesso, giacchè*

$$P \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow P \in \mathbb{R}^3 \cup \mathcal{I} = \mathbb{R}^{3*}$$

Allo stesso modo un punto immaginario è u punto complesso

$$P \in \mathcal{I} \Longrightarrow P \in \mathbb{R}^3 \cup \mathcal{I}$$

In altri termini, punti reali e punti immaginari sono particolari punti complessi.

Sia $\mathcal{R}'$ un riferimento cartesiano, comunque assegnato, di $\mathbb{R}^3$. Sia P un punto immaginario i.e. $P \in \mathcal{I}$, onde $P = [m]$. Per quanto precede è $m \in [m]$ con $m = ((x, y, z), \mathcal{R})$ avendo indicato semplicemente con x, y, z i numeri complessi ξ, η, ζ. Riesce $m' = ((x', y', z'), \mathcal{R}') \in [m] \Longleftrightarrow m'\omega m \Longleftrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{c} + \hat{A}\mathbf{x}$. Dunque dati $P = [m]$ e $\mathcal{R}'$, è univocamente determinata la terna (x', y', z') tale che $((x', y', z'), \mathcal{R}') \in [m]$:

$$P = [m], \ \mathcal{R}') \Longrightarrow \exists! \, (x', y', z') \in \mathbb{C}^3 \mid ((x', y', z'), \mathcal{R}') \in [m]$$

I numeri complessi x', y', z' sono le *coordinate* di P in $\mathcal{R}'$. Osserviamo che il riferimento cartesiano $\mathcal{R}'$ dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$ è anche un riferimento dello spazio complesso $\mathbb{R}^{3*}$. Infatti

$$\forall P \in \mathbb{R}^{3*}, \ \exists \, (x, y, z) \mid x, y, z \text{ sono le coordinate di } P \text{ in } \mathcal{R}'$$

Definizione 6 *$\mathcal{R}'$ si chiama **riferimento reale** di $\mathbb{R}^{3*}$.*

Evidentemente

$$P \in \mathbb{R}^{3*} \text{ è reale } \Longleftrightarrow \exists \mathcal{R} \mid P\,(x, y, z) \text{ in } \mathcal{R} \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R}$$

Nel caso contrario P è immaginario.

1.3 Coniugio

Assegnato $P \in \mathbb{R}^{3*}$ e un riferimento reale $\mathcal{R}$ di $\mathbb{R}^{3*}$ in cui le coordinate di P sono (x, y, z), si dice *coniugato* di P il punto $P^* \in \mathbb{R}^{3*}$ tale che le sue coordinate in $\mathcal{R}$ sono x^*, y^*, z^*, dove $x^*, ...,$ sono i complessi coniugati di x, y, z. Evidentemente $P = P^* \Longleftrightarrow P$ è reale.

Definizione 7 *L'applicazione biiettiva*

$$\begin{aligned} &* : \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}^{3*} \\ &* : P \to P^*, \ \ \forall P \in \mathbb{R}^{3*}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

*si chiama **coniugio**. Quindi*

$$*\,(P) = P^*, \ \ \forall P \in \mathbb{R}^{3*}$$

Proposizione 8 *L'operazione di coniugio è indipendente dal riferimento reale $\mathcal{R}$ dello spazio complesso $\mathbb{R}^{3*}$.*

Dimostrazione. Assegnato un punto $P\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^{3*}$ in $\mathcal{R}$ e quindi $P^*\,(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{3*}$, sia $\mathcal{R}'$ un qualunque riferimento reale di $\mathbb{R}^{3*}$ distinto da $\mathcal{R}$. Le coordinate $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ di P in $\mathcal{R}'$ sono legate alle coordinate $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dalla (1.4). Alla stessa maniera le coordinate $\tilde{\mathbf{x}}' = (\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$ di P^* in $\mathcal{R}'$ sono legate alle coordinate $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ dalla

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{c} + \hat{A}\mathbf{x}^*$$

Prendendo il complesso coniugato di primo e secondo membro della (1.4) e tenendo conto che $\mathbf{c}$ e $\hat{A}$ sono reali, si ha

$$\mathbf{x}'^* = \mathbf{c} + \hat{A}\mathbf{x}^*,$$

che confrontata con la precedente porge

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{x}'^*$$

■

Componendo l'applicazione (1.11):

$$(* \circ *)(P) = *(*(P)) = *(P^*) = P$$

Cioè

$$\forall P \in \mathbb{R}^{3*}, \ \ (* \circ *)(P) = P \Longrightarrow * \circ * = \bar{1},$$

dove $\bar{1}$ denota l'applicazione identica: $\bar{1}(P) = P, \ \forall P \in \mathbb{R}^{3*}$. Si scrive dunque

$$*^2 = \bar{1}$$

In altri termini, il quadrato del coniugio è l'identità. Per quanto precede i punti reali sono invarianti rispetto all'azione del coniugio (*punti uniti* nel coniugio).

Capitolo 2

Vettori complessi

Dati i punti complessi P, Q, P', Q', formiamo le coppie ordinate (P, Q), (P', Q'). Sussiste la seguente definizione

Definizione 9 *(P', Q') è equipollente a (P, Q) se, assegnato un riferimento reale $\mathcal{R}$ di $\mathbb{R}^{3*}$, si ha*

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1, \;\; y_2' - y_1' = y_2 - y_1, \;\; z_2' - z_1' = z_2 - z_1, \tag{2.1}$$

dove, con ovvio significato dei simboli

$$P(x_1, y_1, z_1), \;\; Q(x_2, y_2, z_2), \;\; P'(x_1', y_1', z_1'), \;\; Q'(x_2', y_2', z_2')$$

Ad esempio, nel caso di $\mathbb{R}^2$ abbiamo $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $P'(x_1', y_1')$, $Q'(x_2', y_2')$ in un assegnato riferimento $\mathcal{R}(Oxy)$, per cui le coppie ordinate (P, Q), (P', Q') sono equipollenti se $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$, $y_2' - y_1' = y_2 - y_1$. Ciò implica l'equipollenza[1] dei segmenti orientati $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$, come riportato in fig. 2.1.

È facile persuadersi che se le (2.1) valgono in un riferimento reale $\mathcal{R}$, esse continueranno a valere in ogni riferimento reale di $\mathbb{R}^{3*}$. Denotiamo con J l'insieme delle coppie ordinate di punti complessi. Cioè

$$J = \left\{(P, Q) \mid P, Q \in \mathbb{R}^{3*}\right\} = \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$$

La definizione 9 induce in J una relazione σ che chiamiamo *relazione di equipollenza*:

$$\begin{aligned} &\sigma : J \to \mathcal{P}(J) \\ &\sigma : (P, Q) \to \sigma((P, Q)), \;\; \forall (P, Q) \in J, \end{aligned}$$

essendo $\sigma((P, Q))$ l'insieme di tutte e sole le coppie di punti complessi equipollenti a (P, Q). Quindi

$$(P, Q)\, \sigma\, (P', Q') \overset{def}{\Longleftrightarrow} (P', Q') \in J' = \sigma((P, Q))$$

La relazione di equipollenza verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà riflessiva**

   $(P, Q)\, \sigma\, (P, Q), \;\; \forall (P, Q) \in J$

2. **Proprietà simmetrica**

   $(P, Q)\, \sigma\, (P', Q') \Longrightarrow (P', Q')\, \sigma\, (P, Q), \;\; \forall (P, Q) \in J$

[1] Ricordiamo che due segmenti orientati si dicono *equipollenti* se oltre a essere paralleli, sono equiversi e hanno la stessa lunghezza.

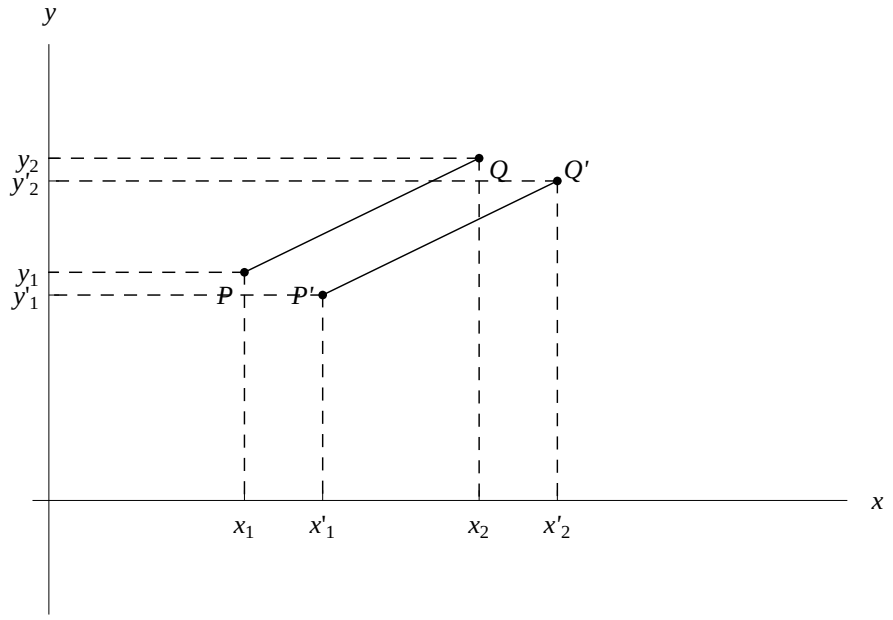


Figura 2.1: In R^2 l'equipollenza delle coppie ordinate (P, Q) e (P', Q') si traduce nell'equipollenza dei segmenti orientati $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$.

3. **Proprietà transitiva**

   $(P, Q)\,\sigma\,(P', Q')\,,\ \ (P', Q')\,\sigma\,(P'', Q'') \Longrightarrow (P, Q)\,\sigma\,(P'', Q'')\,,\ \ \forall\,(P, Q)\,, (P', Q')\,, (P'', Q'') \in J$

Le proprietà 1, 2, 3 implicano che σ è una relazione di equivalenza in J, per cui restano definite le classi di equivalenza

$$[(P, Q)] = \{(P', Q') \in J \mid (P', Q')\,\sigma\,(P, Q)\}\,, \tag{2.2}$$

che partizionano J determinando l'insieme quoziente

$$J/\sigma = \{[(P, Q)] \mid (P, Q) \in J\}$$

Definizione 10 *Dicesi* ***vettore libero complesso*** *o semplicemente* ***vettore complesso****, una classe di equivalenza (2.2), cioè un elemento* $[(P, Q)] \in J/\sigma$*. Un vettore complesso si indica con un simbolo grassettato* ($\mathbf{a}$) *o soprasegnato con una freccia* ($\vec{a}$)*.*

Osservazione 11 *Si noti che la definizione precedente è un'estensione della definizione di vettore libero ordinario; infatti, quest'ultimo è una classe di equivalenza*

$$\left[\overline{PQ}\right] = \left\{\overline{PQ} \mid \overline{P'Q'} \text{ equipollente a } \overline{PQ}\right\},$$

giacchè la relazione di equipollenza è manifestamente una relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$*.*

In un riferimento reale $\mathcal{R}$ le componenti cartesiane di $\mathbf{a} = [(P, Q)]$ sono

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1, \tag{2.3}$$

essendo $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ in $\mathcal{R}$. Passando da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ le (2.3) si trasformano secondo la legge

$$\mathbf{a}' = \hat{A}\mathbf{a} \tag{2.4}$$

Cioè

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a'_x = a_{11}a_x + a_{12}a_y + a_{13}a_z \\ a'_y = a_{21}a_x + a_{22}a_y + a_{23}a_z \\ a'_z = a_{31}a_x + a_{32}a_y + a_{33}a_z \end{cases} \tag{2.5}$$

Denotiamo con $V(\mathbb{R}^{3*})$ lo spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$) i cui elementi sono i vettori complessi, dopodichè introduciamo in tale insieme le leggi di composizione:

$$\begin{cases} + : V(\mathbb{R}^{3*}) \times V(\mathbb{R}^{3*}) \to V(\mathbb{R}^{3*}) \\ + : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{cases}, \quad \begin{cases} \cdot : \mathbb{C} \times V(\mathbb{R}^{3*}) \to V(\mathbb{R}^{3*}) \\ \cdot : (\lambda, \mathbf{a}) \to \lambda\mathbf{a} \end{cases} \tag{2.6}$$

La prima delle (2.6) è l'addizione di vettori complessi, mentre la seconda è la moltiplicazione di uno scalare per un vettore complesso.

Proposizione 12 *Le leggi di composizione (2.6) sono indipendenti dal riferimento reale $\mathcal{R}$.*

Dimostrazione. Scriviamo

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{in } \mathcal{R}$$

Comunque prendiamo un riferimento reale $\mathcal{R}'$, le componenti di tali vettori si trasformano secondo la legge (2.5), per cui posto $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, si ha $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$ e

$$\begin{aligned} c'_x &= a_{11}(a_x + b_x) + a_{12}(a_y + b_y) + a_{13}(a_z + b_z) \\ &= \underbrace{a_{11}a_x + a_{12}a_y + a_{13}a_z}_{=a'_x} + \underbrace{a_{11}b_x + a_{12}b_x + a_{13}b_z}_{=b'_y} \end{aligned}$$

Quindi $c'_x = a'_x + b'_x$, da cui le rimanenti per permutazione ciclica di x, y, z. Ne consegue che $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$, onde l'operazione di addizione di vettori è indipendente dal riferimento reale $\mathcal{R}$. Poniamo ora

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a},$$

cosicchè

$$\mathbf{d} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

Eseguendo la trasformazione (2.5):

$$\begin{aligned} d'_x &= a_{11}(\lambda a_x) + a_{12}(\lambda a_y) + a_{13}(\lambda a_z) \\ &= \lambda a_{11}a_x + \lambda a_{12}a_y + \lambda a_{13}a_z \end{aligned}$$

Quindi $d'_x = \lambda a'_x$, da cui le rimanenti per permutazione ciclica di x, y, z. Ne consegue che $\mathbf{d}' = \lambda\mathbf{a}'$, onde l'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è indipendente dal riferimento reale $\mathcal{R}$. ■

Detto $V(\mathbb{R}^3)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono i vettori liberi ordinari, consideriamo l'applicazione ϕ che a un vettore $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^3)$ associa un vettore $\phi(\mathbf{a}) \in V(\mathbb{R}^{3*})$ avente le stesse componenti di $\mathbf{a}$ (in una base assegnata). Scriviamo

$$\begin{aligned} &\phi : V(\mathbb{R}^3) \to V(\mathbb{R}^{3*}) \\ &\phi : \mathbf{a} \to \phi(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Più precisamente, siano $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, $\{\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z\}$ due basi di $V(\mathbb{R}^3)$ e $V(\mathbb{R}^{3*})$ rispettivamente. Abbiamo

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z,$$

onde

$$\phi(\mathbf{a}) = a_x\mathbf{e}'_x + a_y\mathbf{e}'_y + a_z\mathbf{e}'_z$$

Riesce

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V\left(\mathbb{R}^3\right) \\ \phi(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda\phi(\mathbf{a}), \quad \forall \lambda \in \mathcal{C}, \ \forall \mathbf{a} \in V\left(\mathbb{R}^3\right), \end{aligned}$$

da cui la linearità di $\phi \Longrightarrow \phi$ è un omomorfismo da $V(\mathbb{R}^3)$ a $V(\mathbb{R}^{3*})$. In particolare è un omomorfismo iniettivo, giacchè

$$a \neq b \Longrightarrow \phi(\mathbf{a}) \neq \phi(\mathbf{b})$$

***

Proprietà e definizioni relative ai vettori liberi ordinari si estendono immediatamente ai vettori liberi complessi, a patto di introdurre un riferimento cartesiano complesso. A tale scopo potremmo dimostrare che $\dim V(\mathbb{R}^{3*}) = 3$, onde un qualunque sistema linearmente indipendente $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\} \subset V(\mathbb{R}^{3*})$ è una base di $V(\mathbb{R}^{3*})$:

$$\mathbf{a} \in V\left(\mathbb{R}^{3*}\right) \Longrightarrow \exists a_x, a_y, a_z \in \mathbb{C} \mid \mathbf{a} = a_x\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_y\boldsymbol{\varepsilon}_2 + a_z\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

Ovviamente i numeri complessi a_x, a_y, a_z sono le componenti del vettore $\mathbf{a}$ nella base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$. In particolare, fissato ad arbitrio un punto $O \in \mathbb{R}^{3*}$, comunque prendiamo $X \in \mathbb{R}^{3*}$, assumiamo come coordinate x, y, z di X, le componenti del vettore OX, che verrà indicato - come è consuetudine - con $X - O$.

Ne consegue che l'assegnazione di $O \in \mathbb{R}^{3*}$ e di una base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ di $V(\mathbb{R}^{3*})$, individua univocamente il riferimento complesso $\mathcal{R}^*(Oxyz)$ dello spazio complesso $\mathbb{R}^{3*}$.

2.1 Condizione di parallelismo

Risulta

$$\left.\begin{array}{c} \text{il vettore } \mathbf{b} \in V(\mathbb{R}^{3*}) \\ \text{è parallelo al vettore } \mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^{3*}) \end{array}\right) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$$

Cioè $\mathbf{b}$ è parallelo ad $\mathbf{a}$ se e solo se $\mathbf{b}$ ed $\mathbf{a}$ sono proporzionali o, ciò che è lo stesso, se e solo se il sistema di vettori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ è linearmente dipendente.

Proposizione 13 *Assegnato un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^{3*}$, siano*

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^{3*}, \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^{3*}$$

Risulta

$$\mathbf{b} \textit{ parallelo al vettore } \mathbf{a} \Longleftrightarrow \textit{rank}\left[\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}\right] < 2$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \text{ parallelo al vettore } \mathbf{a} &\Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \\ &\Longleftrightarrow b_x = \lambda a_x,\ b_y = \lambda a_y,\ b_z = \lambda a_z,\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \lambda a_x & \lambda a_y & \lambda a_z \end{pmatrix},$$

onde l'asserto. ■

2.2 Prodotto scalare

Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale di $\mathbb{R}^{3*}$, siano

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \in V\left(\mathbb{R}^{3*}\right), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in V\left(\mathbb{R}^{3*}\right)$$

Definizione 14 *Il prodotto scalare di* $\mathbf{a}$ *per* $\mathbf{b}$ *è definito da*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2.7}$$

Vediamo dunque che l'estensione complessa di $\mathbb{R}^3$ conserva la nozione di prodotto scalare. Si tratta di una forma bilineare, cioè lineare rispetto ai singoli vettori. In particolare verifica la proprietà commutativa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ e dalla bilinearità segue che

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \lambda\left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\right), \quad \forall\lambda \in \mathbb{C} \\ \mathbf{a} \cdot (\mu\mathbf{b}) &= \mu\left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\right), \quad \forall\mu \in \mathbb{C}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Il modulo di un vettore $\mathbf{a}$ è definito da

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \tag{2.9}$$

Cioè

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.10}$$

Se $\mathbf{a}$ è un vettore non reale

$$|\mathbf{a}| = 0 \not\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

Ad esempio, $\mathbf{a} = \left(\sqrt{2}, i, i\right)$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2 - 1 - 1} = 0,$$

pur essendo $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Banalmente

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \Longrightarrow |\mathbf{a}| = 0 \tag{2.12}$$

Dalle (2.11)-(2.12) segue che l'annullarsi del modulo di un vettore non reale è condizione necessaria ma non sufficiente affinchè il vettore dato sia il vettore nullo. In un capitolo successivo vedremo che i vettori non nulli di modulo nullo compongono uno speciale sottoinsieme di $V\left(\mathbb{R}^{3*}\right)$.

***

$$\mathbf{a} \in V\left(\mathbb{R}^{3*}\right) \Longrightarrow \exists \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in V\left(\mathbb{R}^{3}\right) \mid \mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}'',$$

dove

$$\mathbf{a}' \overset{def}{=} \operatorname{Re}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}'' \overset{def}{=} \operatorname{Im}(\mathbf{a})$$

Esempio 15 *Per* $\mathbf{a} = \left(1+i, \sqrt{2}-3i, 3+4i\right)$, *si ha*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(1, \sqrt{2}, 3\right) + (i, -3i, 4i) \\ &= \left(1, \sqrt{2}, 3\right) + i\,(1, -3, 4), \end{aligned}$$

cioè

$$\mathbf{a}' = \left(1, \sqrt{2}, 3\right), \quad \mathbf{a}'' = (1, -3, 4)$$

Esprimiamo il modulo di un vettore complesso in funzione del modulo della parte reale e della parte immaginaria del vettore medesimo, e del loro prodotto scalare:

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}' + i\mathbf{a}'') \cdot (\mathbf{a}' + i\mathbf{a}'')$$

Eseguendo il prodotto scalare a secondo membro

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}'|^2 - |\mathbf{a}''|^2 + 2i\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' \tag{2.13}$$

2.3 Condizione di ortogonalità

Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V\left(\mathbb{R}^{3*}\right) - \{\mathbf{0}\}$. Sussiste la seguente definizione

Definizione 16

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

A differenza dei vettori reali che se sono paralleli non possono essere ortogonali, due vettori complessi non nulli, possono essere contemporaneamente paralleli e ortogonali. Invero, sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 17 *Siano* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *due vettori non reali, paralleli e non nulli.*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow |\mathbf{a}| = 0, \ |\mathbf{b}| = 0$$

Dimostrazione.

$$\mathbf{b} \text{ parallelo al vettore } \mathbf{a} \Longleftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \mathbf{b} = \rho\mathbf{a}$$

Deve essere $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$ giacchè $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ per ipotesi. Quindi

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow 0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\rho\mathbf{a}) = \rho\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \underset{\rho \neq 0}{\Longleftrightarrow} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Inoltre

$$0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(\frac{1}{\rho}\mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\rho}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b},$$

onde l'asserto. ■

Capitolo 3

Rette e piani dello spazio complesso

3.1 Rappresentazione del piano

Iniziamo ad enunciare la condizione di allineamento che ci permetterà di definire la retta quale insieme di punti dello spazio complesso.

Condition 18 ***(Condizione di allineamento)***
I punti complessi P_k con $k = 1, 2, 3$ tali che $P_k \neq P_{k' \neq k}$ si dicono ***allineati*** *se il sistema di vettori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \subset V(\mathbb{R}^{3*})$ è linearmente dipendente, essendo $\mathbf{a} = P_2 - P_1,\ \mathbf{b} = P_3 - P_1$.*

Se $x_k, y_k, z_k \in \mathbb{C}$ sono le coordinate cartesiane di P_k in un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di $\mathbb{R}^{3*}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \mathbf{b} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se formiamo la matrice M

$$M = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

La condizione che $\mathbf{b}$ sia parallelo ad $\mathbf{a}$ implica l'annullarsi dei minori del secondo ordine di M:

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

D'altra parte

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Permutando ciclicamente x, y, z, otteniamo:

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

$$\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dalle (3.3) segue

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

Ma tali determinanti sono i minori di ordine 3 estratti dalla matrice

$$M' = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

cancellando rispettivamente la prima, seconda e terza colonna, per cui la condizione di allineamento può scriversi come

$$P_1, P_2, P_3 \text{ sono allineati} \Longleftrightarrow rg\,(M') < 3, \tag{3.8}$$

dove il simbolo $rg\,(\cdot)$ denota il rango di una matrice.

Definizione 19 *Dicesi* ***retta*** *l'insieme dei punti allineati con due punti complessi assegnati.*

***

Condition 20 ***(Condizione di complanarità)***
I punti complessi P_k con $k = 1, 2, 3, 4$ tali che $P_k \neq P_{k' \neq k}$ si dicono ***complanari*** *se il sistema di vettori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset V\,(\mathbb{R}^{3*})$ è linearmente dipendente, essendo $\mathbf{a} = P_2 - P_1$, $\mathbf{b} = P_3 - P_1$, $\mathbf{c} = P_4 - P_1$.*

Se $x_k, y_k, z_k \in \mathbb{C}$ sono le coordinate cartesiane di P_k in un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di R^{3*}, si ha

$$\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{3.9}$$

$$\mathbf{b} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\mathbf{c} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1) \tag{3.10}$$

Se formiamo la matrice H

$$H = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix},$$

la condizione di complanarità si scrive

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ sono complanari} \Longleftrightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \text{ è linearmente dipendente} \Longleftrightarrow \det H = 0 \tag{3.11}$$

Un calcolo diretto porge

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

per cui la condizione di complanarità può scriversi come

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ sono complanari} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.12}$$

Definizione 21 *Dicesi **piano** l'insieme dei punti complessi complanari a tre punti complessi non allineati.*

Dati $P_k(x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^{3*}$ con $k = 1, 2, 3$ tali che P_k distinti e non allineati, segue che l'equazione del piano passanti per i suddetti punti è

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3.13}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sono i minori di ordine 3 estratti dalla matrice (3.7) cancellando rispettivamente la prima, seconda, terza e quarta colonna, e presi con segni alterni. Per quanto precede, i punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati, onde per la (3.8) è $r(M') = 3 \Longrightarrow \exists$ almeno un minore del terzo ordine estratto dalla (3.7) diverso da zero. Ciò implica che i coefficienti a, b, c, d dell'equazione lineare (3.13) non sono tutti nulli.

3.2 Rappresentazione della retta

3.2.1 Rappresentazione ordinaria

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ una retta può essere rappresentata come intersezione di due piani distinti e non paralleli. Tale rappresentazione continua a valere nello spazio complesso $\mathbb{R}^{3*}$. Precisamente, assegnati i piani

$$\begin{aligned} \alpha &: ax + by + cz + d = 0 \\ \alpha' &: a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

con $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ tali che $rg(\mathcal{A}) = 2$, essendo[1]

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

[1] Ciò implica che $\mathcal{A}$ non è la matrice nulla (i.e. a, b, c, a', b', c' non sono tutti nulli) e che α non è parallelo ad α'.

Ciò posto, denotando con r la retta data dall'intersezione di α con α', si ha

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \tag{3.16}$$

che compone la *rappresentazione ordinaria* della retta r. Osserviamo che $\mathcal{A}$ è la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}, \tag{3.17}$$

la cui matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Riesce $rg(\mathcal{A}) = 2 \Longrightarrow rg(\mathcal{B}) = 2$; senza perdita di generalità supponiamo che sia

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0,$$

per cui abbiamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} ax + by = -d - c\lambda \\ a'x + b'y = -d' - c'\lambda \end{cases}, \tag{3.19}$$

avendo assunto l'incognita z come parametro i.e. $z = \lambda$. Applicando la regola di Cramer otteniamo le ∞^1 soluzioni

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} d + c\lambda & b \\ d' + c'\lambda & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} b & d + c\lambda \\ b' & d' + c'\lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad z = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

come appunto doveva essere, giacchè una retta contiene ∞^1 punti.

Osservazione 22 *Dal momento che esistono infinite coppie di piani distinti passanti per r, si ha che un'assegnata retta r ammette infinite rappresentazioni del tipo (3.16).*

3.2.2 Rappresentazione parametrica

Assegnata una retta r siano $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2) \in r$. Riesce

$$P(x, y, z) \in r \Longleftrightarrow P \text{ è allineato con } P_1 \text{ e } P_2$$

Dalla condizione di allineamento (cfr. 18) segue che introdotti i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \mathbf{b} &= P - P_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \end{aligned}$$

si ha

$$P(x, y, z) \in r \Longleftrightarrow \mathbf{b} // \mathbf{a} \Longleftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{C} \mid \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$$

L'ultima relazione esprimente la proporzionalità tra **a** e **b**, può essere scritta componente per componente, ottenendo

$$x = x_1 + \rho\,(x_2 - x_1)\,,\ y = y_1 + \rho\,(y_2 - y_1)\,,\ z = z_1 + \rho\,(z_2 - z_1)\,,\quad \rho \in \mathbb{C} \tag{3.20}$$

La (3.20) compone una *rappresentazione parametrica* della retta passante per i punti complessi P_1 e P_2. Il numero complesso ρ è il *parametro* della rappresentazione. Per quanto precede, la terna di numeri complessi $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ definisce le componenti del vettore complesso **a**, che è un vettore parallelo ad r, onde per definizione di numeri direttori di una retta, si ha

$$\lambda = x_2 - x_1,\ \mu = y_2 - y_1,\ \nu = z_2 - z_1, \tag{3.21}$$

con $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$ giacchè $P_1 \neq P_2$. Più in generale, assegnate le terne di numeri complessi (α, β, γ) e $(\lambda, \mu, \nu) \neq (0, 0, 0)$, il luogo geometrico dei punti di $\mathbb{R}^{3*}$

$$x = \alpha + \rho\lambda,\ y = \beta + \rho\mu,\ z = \gamma + \rho\nu$$

al variare di $\rho \in \mathbb{C}$, è una retta di numeri direttori λ, μ, ν, passante per i punti $(\alpha, \beta, \gamma)\,,\ (\alpha + \lambda, \beta + \mu, \gamma + \nu)$.

3.2.3 Rapporti uguali

Senza perdita di generalità, supponiamo che la retta r di cui vogliamo fornire una rappresentazione nella forma dei *rapporti uguali*, non sia parallela ad uno dei piani coordinati di un riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^{3*}$. Dati ad arbitrio $P_1\,(x_1, y_1, z_1)\,, P_2\,(x_2, y_2, z_2) \in r$ con $P_1 \neq P_2$, formiamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{pmatrix},$$

dove x, y, z sono le coordinate di un generico punto di r. Per la condizione 18 deve essere $rg\,(M) < 2$, onde

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 \underset{z_2 - z_1 \neq 0,\ y_2 - y_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x - x_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 \underset{z_2 - z_1 \neq 0,\ x_2 - x_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

da cui otteniamo la rappresentazione di r nella forma dei rapporti uguali

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{3.22}$$

La richiesta che r non sia parallela a uno dei piani coordinati implica che, comunque prendiamo $P_1, P_2 \in r$ con $P_1 \neq P_2$, si ha

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \neq (0, 0, 0)$$

Tuttavia da un punto di vista formale, la (3.22) si estende al caso in cui r è parallela a uno dei piani coordinati. Ad esempio, se r è parallela al piano xy si ha:

$$x_2 - x_1 = 0,\ y_2 - y_1 \neq 0,\ z_2 - z_1 = 0,$$

per cui la (3.22) si scrive

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{0} \tag{3.23}$$

Si badi che la (3.23) ha un significato puramente formale, dato che implica una divisione per zero. Infine osserviamo che $x_2 - x_1 = \lambda,\ y_2 - y_1 = \mu,\ z_2 - z_1 = \nu$ con λ, μ, ν numeri direttori di r, per cui la (3.22) si riscrive

$$\frac{x - x_1}{\lambda} = \frac{y - y_1}{\mu} = \frac{z - z_1}{\nu} \tag{3.24}$$

3.3 Piani e rette immaginari

Abbiamo visto che l'equazione di un piano α in $\mathbb{R}^{3*}$ ha la forma

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3.25}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ non tutti nulli. A partire dalla (3.25) possiamo definire il **piano coniugato** ad α:

$$\alpha^* : a^*x + b^*y + c^*z + d^* = 0 \tag{3.26}$$

Sussiste la seguente definizione:

Definizione 23 *Un piano α si dice **reale** se $\alpha \equiv \alpha^*$. Nel caso contrario, si dice che il piano α è **immaginario**.*

Come è noto, la terna ordinata (a, b, c) definisce la *giacitura* di α. Sussiste la seguente proposizione

Proposizione 24 *Ogni piano immaginario parallelo al proprio coniugato ha una giaciutura reale.*

Dimostrazione. Sia $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ una terna ordinata di numeri reali non tutti nulli che definisce la giacitura di un piano immaginario $\alpha // \alpha^*$, essendo α^* il coniugato di α. La giacitura α^* è (a^*, b^*, c^*) tale che $\alpha^* = a,\ b^* = b,\ c^* = c$, da cui l'asserto. ■

Quindi

$$\begin{aligned} &\alpha \text{ e } \alpha^* \text{ sono impropriamente paralleli} \Longleftrightarrow \alpha \text{ è reale} \\ &\alpha \text{ e } \alpha^* \text{ sono propriamente paralleli} \Longrightarrow \alpha \text{ è immaginario ed ha una giacitura reale} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dunque, nel caso di un piano è immediato verificare se si tratta di un piano reale o immaginario. Ad esempio, il piano

$$2ix + y - z + 4 = 0,$$

è immaginario giacchè il coniugato ha equazione $-2ix + y - z + 4 = 0$. Mentre il piano

$$ix - 4iy + 3iz + i = 0,$$

è reale poichè la sua equazione può essere riscritta nella forma $x - 4y + 3z + 1 = 0$. Nel caso di una retta, invece, risulta meno immediato verificare se si tratta di una retta reale o immaginaria. Più specificatamente, assegnata una retta r di $\mathbb{R}^{3*}$:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

con $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ non tutti nulli e con a', b', c' non proporzionali ad a, b, c, definiamo la **retta coniugata** ad r :

$$r^* : \begin{cases} a^*x + b^*y + c^*z + d^* = 0 \\ a'^*x + b'^*y + c'^*z + d'^* = 0 \end{cases}$$

Sussiste la seguente definizione:

Definizione 25 *Una retta r si dice **reale** se $r \equiv r^*$. Nel caso contrario, si dice che la retta r è **immaginaria**.*

Sfortunatamente questa definizione non ci permette, in generale, di stabilire se una retta è reale o immaginaria. Ad esempio:

Esempio 26 *Sia data la retta:*

$$r : \begin{cases} ix + y + (1 - 2i)\, z - 3 = 0 \\ x + 2iy - 2\,(1 - i)\, z - 6i = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

La coniugata è

$$r^* : \begin{cases} -ix + y + (1 + 2i)\, z - 3 = 0 \\ x - 2iy - 2\,(1 + i)\, z + 6i = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

Il confronto di r con r^* non fornisce indicazioni utili. Proviamo allora a moltiplicare la prima equazione di (3.29) per $-2i$

$$\begin{cases} 2x - 2iy - 2i\,(1 - 2i)\, z + 6i = 0 \\ x + 2iy - 2\,(1 - i)\, z - 6i = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$3x - 4z - 2 = 0 \tag{3.31}$$

Moltiplicando la seconda equazione di (3.29) per $-i$

$$\begin{cases} ix + y + (1 - 2i)\, z - 3 = 0 \\ -ix + 2y + 2i\,(1 - i)\, z - 6 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$y + z - 3 = 0 \tag{3.32}$$

Mettendo a sistema le (3.31)-(3.32)

$$\begin{cases} 3x - 4z - 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases},$$

che compone una nuova rappresentazione ordinaria della retta r con coefficienti tutti reali. Ne consegue che r è reale, giacchè $r \equiv r^*$.

L'esempio appena visto mostra che una retta r reale può avere una rappresentazione in cui compaiono numeri complessi, per cui la presenza di numeri complessi non implica che r sia reale. Inoltre, non sempre sono "visibili" le manipolazioni algebriche dell'esempio 26 che riducono le equazioni alla forma reale. Un criterio per stabilire se una retta è reale o immaginaria è il seguente:

Criterio 27 *Se una retta reale passa per un punto immaginario P, necessariamente passa per il coniugato di P. Inversamente, una retta contenente una coppia di punti immaginari coniugati, è reale.*

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dalla definizione 25. ■

Corollario 28 *Per un punto immaginario passa una ed una sola retta reale.*

Dimostrazione. Comunque prendiamo $P \in \mathbb{R}^{3*}$, per il criterio precedente la retta per P e P^* è reale, ed è l'unica retta reale per P poichè per il citato criterio, una retta reale passante per un punto immaginario necessariamente passa per il suo coniugato. ■

Esempio 29 *Sia data la retta*

$$r : x - 1 - i = \frac{y - 2i}{2} = z - 2 - i, \tag{3.33}$$

da cui vediamo che $P_0(1+i, 2i, 2+i) \in r$. Il coniugato di P_0 è $P_0^*(1-i, -2i, 2-i)$. Vediamo se tale punto appartiene ad r:

$$1 - i - 1 - i = \frac{-2i - 2i}{2} = 2 - i - 2 - i$$

Cioè la doppia identità

$$-2i = -2i = -2i,$$

onde $P_0^* \in r \Longrightarrow r$ è reale. Per ricavare una rappresentazione ordinaria reale di r, denotiamo con $M \in r$ il punto medio del segmento $\overline{P_0P_0^*}$, le cui coordinate sono $x_0' = 1,\ y_0' = 0,\ y_0' = 2$. Dalla (3.33) vediamo che una terna di numeri direttori di r è $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = 1$. Ne consegue che una rappresentazione ordinaria reale di r è

$$x - 1 = \frac{y}{2} = z - 2$$

Esempio 30 *Dato $P(1+i, i) \in \mathbb{R}^{2*}$ scrivere l'equazione dell'unica retta reale per P.*

Svolgimento

$P\ (1+i, i) \Longrightarrow P^*(1-i, -i)$, mentre il punto medio del segmento PP^* è $M(1,0) \in \mathbb{R}^2$. Una coppia di numeri direttori è $(-2i, -2i)$, quindi $(1,1)$, da cui una rappresentazione parametrica della retta cercata è

$$x = 1 + \rho,\ y = \rho$$

Eliminando il parametro ρ

$$r : x - y - 1 = 0$$

Esempio 31 *Dato $P(1-2i, 4+3i) \in \mathbb{R}^{2*}$ scrivere l'equazione dell'unica retta reale per P.*

Svolgimento

$P\ (1-2i, 4+3i) \Longrightarrow P^*(1+2i, 4-3i)$, mentre il punto medio del segmento $\overline{PP^*}$ è $M(1,4) \in \mathbb{R}^2$. Una coppia di numeri direttori è $(4i, -6i)$, quindi $(2, -3)$, da cui una rappresentazione parametrica della retta cercata è

$$x = 1 + 2\rho,\ y = -3 + 4\rho$$

Eliminando il parametro ρ

$$r : y = 2x - 5$$

Un criterio necessario ma non sufficiente è

Criterio 32

$$\exists\,(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3 \;\mid \lambda,\mu,\nu \textit{ numeri direttori di } r \quad \begin{matrix}\not\Rightarrow\\ \Longleftarrow\end{matrix} \quad r \textit{ è reale}$$

In altri termini, una retta immaginaria può avere una direzione reale, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 33 *Nel piano complesso* $\mathbb{R}^{2*}$ *sia data la retta*

$$r : (2-i)\,x + (-2+i)\,y + 1 = 0,$$

da cui la coniugata

$$r^* : (2+i)\,x - (2+i)\,y + 1 = 0$$

È conveniente passare alla seguente rappresentazione

$$r : y = x + \frac{1}{5}\,(2+i)$$
$$r^* : y = x + \frac{1}{5}\,(2-i)$$

Come è noto, una coppia di numeri direttori è $(m,1)$*, dove* m *è il coefficiente angolare della retta. Nel nostro caso vediamo che una coppia di numeri direttori di* r *e* r^* *è* $(1,1)$*. Quindi* r *e* r^* *hanno in comune la direzione reale* $(1,1)$ *e sono al contempo immaginarie. Più precisamente, la retta* r *ha coefficiente angolare* 1 *e passa per il punto immaginario* $\left(0,\frac{2+i}{5}\right)$.

Nell'esempio 33 la retta immaginaria assegnata oltre ad avere una direzione reale, è parallela alla propria coniugata. Ciò è una proprietà generale espressa dalla seguente proposizione:

Proposizione 34 *Ogni retta immaginaria parallela alla propria coniugata ha una direzione reale.*

Dimostrazione. Sia $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ una terna ordinata di numeri direttori di una retta immaginaria $r//r^*$, essendo r^* la coniugata di r. I numeri direttori di r^* sono $\lambda^*=\lambda,\ \mu^*=\mu,\ \nu^*=\nu$, da cui l'asserto. ■

Quindi

$$r \text{ e } r^* \text{ sono impropriamente parallele} \Longleftrightarrow r \text{ è reale} \tag{3.34}$$
$$r \text{ e } r^* \text{ sono propriamente parallele} \Longrightarrow r \text{ è immaginaria ed ha una direzione reale}$$

Dalla seconda delle (3.34) segue che una qualunque retta immaginaria r con almeno uno dei numeri direttori immaginario, non è parallela alla propria coniugata r^*. Sussiste poi la seguente definizione:

Definizione 35

$$r \textit{ è immaginaria di } \textbf{\textit{prima specie}} \Longleftrightarrow r \textit{ e } r^* \textit{ sono complanari}$$
$$r \textit{ è immaginaria di } \textbf{\textit{seconda specie}} \Longleftrightarrow r \textit{ e } r^* \textit{ sono sghembe}$$

***

Se un piano immaginario α non è parallelo al proprio coniugato α^*, è univocamente determinata la retta $r = \alpha \cap \alpha^*$, e una sua rappresentazione ordinaria è

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a^*x + b^*y + c^*z + d^* = 0 \end{cases}, \tag{3.35}$$

la cui complessa coniugata ha la seguente rappresentazione ordinaria:

$$r^* : \begin{cases} a^*x + b^*y + c^*z + d^* = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}, \tag{3.36}$$

onde $r \equiv r^* \Longrightarrow r$ è reale[2] $\Longrightarrow \alpha$ ha infiniti punti reali che sono tutti e soli i punti di r. Viceversa, se $\alpha // \alpha^* \Longrightarrow \nexists P \in \mathbb{R}^3 \mid P \in \alpha \cap \alpha^*$, cioè α è privo di punti reali.

Abbiamo stabilito (corollario 28) che per un punto immaginario passa una ed una sola retta reale. Ci aspettiamo, dunque, che per una retta immaginaria passa uno ed un solo piano reale. Più precisamente, abbiamo il seguente criterio per stabilire se un piano è reale o immaginario:

Criterio 36 *Se un piano reale contiene una retta r immaginaria di prima specie, necessariamente contiene la coniugata r^* di r.*

Dimostrazione. r ed r^* sono complanari giacchè per ipotesi r è immaginaria di prima specie. Quindi

$$\exists \alpha \mid r \subset \alpha,\ r^* \subset \alpha \tag{3.37}$$

Applicando il coniugio alla seconda delle relazioni di inclusione (3.37), si ha:

$$(r^*)^* \subset \alpha^* \Longleftrightarrow r \subset \alpha^*$$

Ma $r \subset \alpha$, onde $\alpha \equiv \alpha^*$. ■

Dal criterio 36 seguono i corollari:

Corollario 37 *L'intersezione di una retta immaginaria di prima specie con la propria coniugata è un punto reale, ed è l'unico punto reale della retta.*

Corollario 38 *Per una retta immaginaria di prima specie passa uno ed un solo piano reale.*

Dimostrazione. Comunque prendiamo una retta r immaginaria di prima specie, per il criterio precedente il piano contenente r ed r^* è reale, ed è l'unico piano reale per r, poichè per il citato criterio, un piano contenente una retta immaginaria di prima specie, necessariamente contiene la sua coniugata. ■

Dal corollario 37 segue che una retta immaginaria avente una direzione reale, è priva di punti reali.

Esempio 39 *Determinare l'intersezione di α con α^* nei casi seguenti:*

1. $\alpha : (2 - 3i)\, x + (4 + i)\, y + 2z - i = 0$

[2] Alla stessa conclusione si perviene nel seguente modo: $r = \alpha \cap \alpha^* \Longrightarrow r^* = (\alpha \cap \alpha^*)^* = \alpha^* \cap (\alpha^*)^* = \alpha^* \cap \alpha = r$.

2. $\alpha : 2ix + (3-i)\,y + z = 0$

3. $\alpha : y + (2+i)\,z + 1 = 0$

Svolgimento

1. Qui è $\alpha^* : (2+3i)\,x + (4-i)\,y + 2z + i = 0 \Longrightarrow \alpha$ e α^* non sono paralleli, per cui se $r = \alpha \cap \alpha^*$ si ha
$$r : \begin{cases} (2-3i)\,x + (4+i)\,y + 2z - i = 0 \\ (2+3i)\,x + (4-i)\,y + 2z + i = 0 \end{cases}$$
Sommando membro a membro
$$4x + 8y + 4z = 0 \Longleftrightarrow x + 2y + z = 0$$
Sottraendo membro a membro
$$-6ix - 2iy + 2i = 0 \Longleftrightarrow 3x + y - 1 = 0,$$
per cui un'altra rappresentazione ordinaria di r è
$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Qui è $\alpha^* : -2ix + (3-i)\,y + 2 = 0 \Longrightarrow \alpha$ e α^* non sono paralleli, per cui se $r = \alpha \cap \alpha^*$ si ha
$$r : \begin{cases} 2ix + (3-i)\,y + z = 0 \\ -2ix + (3-i)\,y + 2 = 0 \end{cases}$$
Sommando membro a membro
$$6z + 4 = 0 \Longleftrightarrow 3z + 2 = 0$$
Sottraendo membro a membro
$$-4ix - 2iz = 0 \Longleftrightarrow 2x + z = 0,$$
per cui un'altra rappresentazione ordinaria di r è
$$r : \begin{cases} 3z + 2 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

3. Qui è $\alpha^* : y + (2-i)\,z + 1 = 0 \Longrightarrow \alpha$ e α^* non sono paralleli, per cui se $r = \alpha \cap \alpha^*$ si ha
$$r : \begin{cases} y + (2+i)\,z + 1 = 0 \\ y + (2-i)\,z + 1 = 0 \end{cases}$$
Sommando membro a membro
$$-2y + 4z + 2 = 0 \Longleftrightarrow y + 2z + 1 = 0$$
Sottraendo membro a membro
$$2iz = 0 \Longleftrightarrow z = 0,$$
per cui un'altra rappresentazione ordinaria di r è
$$r : \begin{cases} y + 2z + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Per stabilire se una retta immaginaria r è di prima o seconda specie, dobbiamo verificare se r è complanare o meno alla propria coniugata r^*. Presentiamo un efficiente algoritmo proposto da [2]. Supponiamo che r sia data nella forma ordinaria:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \tag{3.38}$$

onde la complessa coniugata è:

$$r^* : \begin{cases} a^*x + b^*y + c^*z + d^* = 0 \\ a'^*x + b'^*y + c'^*z + d'^* = 0 \end{cases}, \tag{3.39}$$

Da [1] segue che r, r^* sono complanari se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix} = 0 \tag{3.40}$$

Scambiando la terza riga con la seconda:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix} = 0 \tag{3.41}$$

Decomponiamo gli elementi del determinante a primo membro della (3.41) in parte reale e parte immaginaria:

$$a = a_1 + ia_2,\ b = b_1 + ib_2,\ c = c_1 + ic_2,\ d = d_1 + id_2$$
$$a' = a'_1 + ia'_2,\ b' = b'_1 + ib'_2,\ c' = c'_1 + ic'_2,\ d' = d'_1 + id'_2$$

La (3.41) si riscrive:

$$\begin{vmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 & c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \\ a_1 - ia_2 & b_1 - ib_2 & c_1 - ic_2 & d_1 - id_2 \\ a'_1 + ia'_2 & b'_1 + ib'_2 & c'_1 + ic'_2 & d'_1 + id'_2 \\ a'_1 - ia'_2 & b'_1 - ib'_2 & c'_1 - ic'_2 & d'_1 - id'_2 \end{vmatrix} = 0$$

Per note proprietà dei determinanti, segue:

$$\begin{vmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 & c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \\ a_1 - ia_2 & b_1 - ib_2 & c_1 - ic_2 & d_1 - id_2 \\ a'_1 + ia'_2 & b'_1 + ib'_2 & c'_1 + ic'_2 & d'_1 + id'_2 \\ a'_1 - ia'_2 & b'_1 - ib'_2 & c'_1 - ic'_2 & d'_1 - id'_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.42}$$

pur avendosi manifestamente

$$\begin{vmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 & c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \\ a'_1 + ia'_2 & b'_1 + ib'_2 & c'_1 + ic'_2 & d'_1 + id'_2 \\ a_1 - ia_2 & b_1 - ib_2 & c_1 - ic_2 & d_1 - id_2 \\ a'_1 - ia'_2 & b'_1 - ib'_2 & c'_1 - ic'_2 & d'_1 - id'_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

La (3.42) suggerisce il seguente algoritmo:

Algoritmo 40 *Assegnata la retta*

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

con $a, b, c, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ *e non tutti nulli, il* ***determinante associato alla retta*** r *è il determinante del quart'ordine:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix},$$

mentre il ***determinante ridotto*** *è*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix},$$

dove

$$\begin{cases} a_1 = \operatorname{Re} a, \ a_2 = \operatorname{Im} a \\ b_1 = \operatorname{Re} b, \ b_2 = \operatorname{Im} b \\ c_1 = \operatorname{Re} c, \ c_2 = \operatorname{Im} c \\ d_1 = \operatorname{Re} d, \ d_2 = \operatorname{Im} d \end{cases}$$

In altri termini, gli elementi della prima riga di Δ_1 *sono le parti reali degli elementi della prima riga di* Δ*; gli elementi della seconda riga di* Δ_1 *sono le parti immaginarie degli elementi della prima riga di* Δ*; gli elementi della terza riga di* Δ_1 *sono le parti reali degli elementi della terza riga di* Δ*; gli elementi della quarta riga di* Δ_1 *sono le parti immaginarie degli elementi della terza riga di* Δ*. Ad esempio, supponiamo di avere:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 2 & -(1-i) & -1 \\ 1-i & 2 & -(1+i) & -1 \\ 2i & 1+i & 0 & -1 \\ -2i & 1-i & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Il determinante ridotto è

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Il calcolo di Δ_1 *ha un carico computazionale minore di quello di* Δ*. In questo esempio specifico è* $\Delta_1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$*.*

Alternativamente, dopo aver appurato che r non è parallela alla sua coniugata, si studia il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a^*x + b^*y + c^*z + d^* = 0 \\ a'^*x + b'^*y + c'^*z + d'^* = 0 \end{cases}, \tag{3.43}$$

e se risulta compatibile e determinato, r ed r^* sono complanari e l'unica soluzione del sistema è la terna ordinata (x, y, z) di coordinate cartesiane del punto reale $P \in r \cap r^*$. Viceversa, se il sistema (3.43) è incompatibile, r ed r^* sono sghembe ovvero r è immaginaria di seconda specie.

Esempio 41 *Dopo aver verificato che la seguente retta*

$$r : \begin{cases} (1-i)\,x + y - (1+i)\,z - 2 = 0 \\ 2x + (1-i)\,y - 2 = 0 \end{cases}, \tag{3.44}$$

è immaginaria di prima specie, scrivere l'equazione dell'unico piano reale contenente r.

Svolgimento

Una terna di numeri direttori della retta assegnata è data dai minori estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1+i \\ 2 & 1-i & 0 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, presi con segni alterni. Cioè

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} = -2, \; - \begin{vmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\,(1+i)\,, \; \begin{vmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\,(1+i)\,,$$

da cui

$$\lambda = 1, \; \mu = 1+i, \; \nu = 1+i$$

Pertanto una terna di numeri direttori della coniugata r^* è

$$\lambda^* = 1, \; \mu^* = 1-i, \; \nu^* = 1-i,$$

onde r ed r^* non sono parallele. Vediamo se sono complanari.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1 & -(1+i) & -2 \\ 1+i & 1 & -(1-i) & -2 \\ 2 & 1-i & 0 & -2 \\ 2 & 1+i & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ne consegue che r è immaginaria di prima specie.

Metodo 2

Determiniamo le coordinate dell'eventuale punto di intersezione. Tali coordinate sono le soluzioni di

$$\begin{cases} (1-i)\,x+y-(1+i)\,z=2 \\ 2x+(1-i)\,y=2 \\ (1+i)\,x+y-(1-i)\,z=2 \\ 2x+(1+i)\,y=2 \end{cases}, \tag{3.45}$$

che è un sistema di quattro equazioni lineari nelle incognite x, y, z. La matrice dei coefficienti è

$$A=\begin{pmatrix} 1-i & 1 & -(1+i) \\ 2 & 1-i & 0 \\ 1+i & 1 & -(1-i) \\ 2 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1-i & 1 & 1+i \\ 2 & 1-i & 0 \\ 2 & 1+i & 0 \end{vmatrix} = 2\,(1+i)\begin{vmatrix} 1 & 1-i \\ 1 & 1+i \end{vmatrix} \\ &= 4i\,(1+i)\neq 0, \end{aligned}$$

per cui $rg\,(A)=3$. La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B=\begin{pmatrix} 1-i & 1 & -(1+i) & 2 \\ 2 & 1-i & 0 & 2 \\ 1+i & 1 & -(1-i) & 2 \\ 2 & 1+i & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

risultando

$$\det B=\begin{vmatrix} 1-i & 1 & -(1+i) & 2 \\ 2 & 1-i & 0 & 2 \\ 1+i & 1 & -(1-i) & 2 \\ 2 & 1+i & 0 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

per cui $rg\,(A)=rg\,(B)=3$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile. Inoltre, risulta essere determinato giacchè il suo rango è pari al numero delle incognite. Un sistema equivalente è

$$\begin{cases} (1-i)\,x+y-(1+i)\,z=2 \\ 2x+(1-i)\,y=2 \\ 2x+(1+i)\,y=2 \end{cases}$$

Applicando la regola di Cramer per le prime due incognite, si ha $x=1,\ y=0$. Dalla prima equazione si ricava facilmente $z=-1$, per cui $P\,(1,0,-1)\in r\cap r^*$. Ne consegue che r, r^* sono complanari, onde la retta assegnata è immaginaria di prima specie. L'unico piano reale contenente r, r^* è il piano $\alpha\in\mathcal{F}$, essendo $\mathcal{F}$ il fascio di asse r, la cui equazione è:

$$(1-i)\,x+y-(1+i)\,z-2+k\,[2x+(1-i)\,y-2]=0 \tag{3.46}$$

Cioè

$$(1+2k-i)\,x+[1+k\,(1-i)]\,y-(1+i)\,z-2\,(1+k)=0 \tag{3.47}$$

Per quanto precede, la (3.47) è l'equazione del fascio di piani di asse r, o ciò che è lo stesso del generico piano di tale fascio. Imponiamo la realtà: $1 + 2k - i = 0$, *da cui* $k = \frac{-1+i}{2}$, *sostituendo nella (3.46)*

$$y - (1+i)\,z - 2\frac{1-2i-1}{2}y + (1-i) = 0$$
$$\iff (1+i)\,y - (1+i)\,z - (1+i) = 0,$$

o ciò che è lo stesso

$$y - z - 1 = 0,$$

che l'equazione dell'unico piano reale contenente r, r^*.

Riassumiamo i risultati raggiunti nelle seguenti proprietà:

Proprietà 42 *Una retta r dello spazio complesso $\mathbb{R}^{n*}$ $(n = 2, 3, ...)$ è reale se e solo se coincide con la propria coniugata o, ciò che è lo stesso, è impropriamente parallela alla propria coniugata.*

Una retta immaginaria è al più propriamente parallela alla propria coniugata. In tal caso le rette immaginarie r e r^* hanno una direzione reale. Diversamente, hanno direzioni immaginarie e se r è di prima specie si intersecano in un punto reale.

Proprietà 43 *Una piano α dello spazio complesso $\mathbb{R}^{n*}$ $(n = 3, 4, ...)$ è reale se e solo se coincide con il proprio coniugato o, ciò che è lo stesso, è impropriamente parallelo al proprio coniugato.*

Un piano immaginario è al più propriamente parallelo al proprio coniugato. In tal caso i piani immaginari α e α^* hanno una giacitura reale. Diversamente, hanno giaciture immaginarie, ma si intersecano secondo una retta reale.

Capitolo 4

Isotropia

4.1 Vettori isotropi

Nel paragrafo 2.2 abbiamo stabilito l'esistenza di vettori complessi non nulli di modulo nullo. Sussiste la seguente definizione:

Definizione 44 *Un **vettore isotropo** è un vettore non nullo di modulo nullo. Un **vettore anisotropo** è un vettore non isotropo.*

Sia $\mathbf{a}$ un vettore isotropo; quindi

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Ne consegue che un vettore isotropo è perpendicolare a se stesso Dal momento che un qualunque vettore non nullo è parallelo a se stesso, segue che un vettore isotropo è contemporaneamente parallelo e perpendicolare a se stesso. Tale circostanza giustifica la denominazione di *vettore isotropo*. Per essere più precisi, l'isotropia esprime l'invarianza di una specifica proprietà rispetto alla direzione di un assegnato spazio. Nel caso dei vettori complessi, l'isotropia esprime l'identificazione del parallelismo con l'ortogonalità.

Proposizione 45 *Due vettori isotropi sono ortogonali se e solo se sono paralleli.*

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dalla proposizione 17. ■

Proposizione 46 *La parte reale e la parte immaginaria di un vettore isotropo sono vettori reali ortogonali e di ugual modulo.*

Dimostrazione. Preso ad arbitrio un vettore isotropo $\mathbf{a}$, dalla (2.13) si ha

$$|\mathbf{a}'|^2 - |\mathbf{a}''|^2 + 2i\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{a}'|^2 = |\mathbf{a}''|^2 \\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' = 0 \end{cases}, \tag{4.1}$$

da cui l'asserto. ■

Si noti che per un qualunque vettore isotropo $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}''$ è $|\mathbf{a}'|, |\mathbf{a}''| \neq 0$. Infatti, se ad esempio è $|\mathbf{a}'| = 0$, si ha $|\mathbf{a}''| = 0$ in quanto per la proposizione appena dimostrata è $|\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}''|$. Quindi

$$|\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}''| = 0 \underset{\mathbf{a}',\mathbf{a}'' \in V(\mathbb{R}^3)}{\Longrightarrow} \mathbf{a}' = \mathbf{a}'' = \mathbf{0},$$

contrariamente alla definizione (44) secondo cui un vettore isotropo è necessariamente non nullo.

Proposizione 47

$$\mathbf{a} \text{ è isotropo} \iff \mathbf{a}^* \text{ è isotropo,}$$

dove $\mathbf{a}^*$ *è il vettore complesso coniugato di* $\mathbf{a}$.

Dimostrazione.

$$\mathbf{a} \text{ è isotropo} \iff \begin{cases} |\mathbf{a}'|^2 = |\mathbf{a}''|^2 \\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' = 0 \end{cases},$$

essendo $\mathbf{a}' = \operatorname{Re}\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'' = \operatorname{Im}\mathbf{a}$. Il modulo al quadrato di $\mathbf{a}^*$ è

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}^*|^2 &= (\mathbf{a}' - i\mathbf{a}'')(\mathbf{a}' - i\mathbf{a}'') \\ &= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' - i\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{a}'' - i\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{a}' + i^2\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{a}'' \\ &= |\mathbf{a}'|^2 - |\mathbf{a}''|^2 - 2i\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' \end{aligned}$$

Dalle (4.1) o, ciò che è lo stesso, dall'isotropia di $\mathbf{a}$, segue $|\mathbf{a}^*| = 0$, cioè l'asserto. ■

Osserviamo infine che l'insieme $W(\mathbb{R}^{3*}) \subset V(\mathbb{R}^{3*})$ dei vettori isotropi non è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{R}^{3*})$ poichè non contiene il vettore nullo. Nemmeno includendo il vettore nullo si ottiene un sottospazio di $V(\mathbb{R}^{3*})$. A tale scopo poniamo $W'(\mathbb{R}^{3*}) = W(\mathbb{R}^{3*}) \cup \{\mathbf{0}\}$; siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W'(\mathbb{R}^{3*})$, onde

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}'' \\ |\mathbf{a}'|^2 = |\mathbf{a}''|^2, \ \ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{b} = \mathbf{b}' + i\mathbf{b}'' \\ |\mathbf{b}'|^2 = |\mathbf{b}''|^2, \ \ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'' = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \overset{def}{=} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (\mathbf{a}' + i\mathbf{a}'') + (\mathbf{b}' + i\mathbf{b}'') \\ &= \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + i(\mathbf{a}'' + \mathbf{b}'') \\ &= \mathbf{c}' + i\mathbf{c}'', \end{aligned}$$

dove $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ e $\mathbf{c}'' = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}''$ e sono manifestamente reali. Riesce

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}'|^2 &= |\mathbf{a}' + \mathbf{b}'|^2 \\ &= (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') \cdot (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') \\ &= |\mathbf{a}'|^2 + 2\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' + |\mathbf{b}'|^2 \end{aligned}$$

Alla stessa maniera

$$|\mathbf{c}''|^2 = |\mathbf{a}''|^2 + 2\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{b}'' + |\mathbf{b}''|^2$$

Dall'isotropia di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si ha

$$|\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}''|, \ \ |\mathbf{b}'| = |\mathbf{b}''|,$$

per cui

$$|\mathbf{c}'|^2 - |\mathbf{c}''|^2 = 2(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' - \mathbf{a}'' \cdot \mathbf{b}'')$$

Tale differenza è in generale non nulla, giacchè risulta (in generale) $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \neq \mathbf{a}'' \cdot \mathbf{b}''$. Ne concludiamo che

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W'\left(\mathbb{R}^{3*}\right) \not\Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \in W'\left(\mathbb{R}^{3*}\right) \tag{4.2}$$

Cioè l'addizione di vettori non conserva l'isotropia.

Esempio 48 *Mostrare che i vettori complessi* $\mathbf{a} = \left(-i, i, \sqrt{2}\right)$ *e* $\mathbf{b} = \left(-i, \sqrt{5}, 2i\right)$ *sono isotropi, ma la loro somma è un vettore anisotropo.*

Svolgimento

Risulta $|\mathbf{a}|^2 = -1 - 1 + 2 = 0$ e $|\mathbf{b}|^2 = -1 + 5 - 4 = 0$, da cui l'istropia dei vettori assegnati. La somma è il vettore complesso:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(-2i, \sqrt{5} + i, \sqrt{2} + 2i\right),$$

il cui modulo al quadrato è

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (-2i)^2 + \left(\sqrt{5} + i\right)^2 + \left(\sqrt{2} + 2i\right)^2 \\ &= -4 + \left(5 + 2i\sqrt{5} - 1\right) + \left(2 + 4\sqrt{2} - 4\right) \\ &= -2 + 2i\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) \neq 0, \end{aligned}$$

per cui $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ non è un vettore isotropo.

***

I vettori isotropi vengono utilizzati in elettrodinamica per lo studio degli stati di polarizzazione circolare delle onde elettromagnetiche. Consideriamo in particolare, un'onda piana monocromatica che si propaga nella direzione positiva dell'asse z di un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(0xyz)$ dello spazio ordinario. Il campo elettrico è espresso in forma complessa da [3]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{E}_0| (\boldsymbol{\varepsilon}_1 + i\boldsymbol{\varepsilon}_2) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \tag{4.3}$$

dove $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{k}$ è il vettore di propagazione, ω la pulsazione e t il tempo, mentre $\mathbf{E}_0$ è un vettore complesso costante. I vettori reali $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ sono i versori degli assi coordinati x ed y rispettivamente. L'onda il cui campo elettrico è dato dalla (4.3) si dice *polarizzata circolarmente*. Per lo studio degli stati di polarizzazione circolare è comodo introdurre il vettore complesso:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_+ = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + i\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

per cui

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{E}_0| \boldsymbol{\varepsilon}_+ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

Riesce

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_1| = |\boldsymbol{\varepsilon}_2|, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0$$

Cioè $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ è un vettore isotropo. Alla stessa maniera possiamo considerare il campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{E}_0| \boldsymbol{\varepsilon}_- e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \tag{4.4}$$

essendo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_- = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - i\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

manifestamente isotropo.

4.2 Retta isotropa

Definizione 49 *Una **retta isotropa** è una retta immaginaria i cui numeri direttori sono le componenti di un vettore isotropo.*

Definizione 50 *Dicesi **retta anisotropa** ogni retta non isotropa.*

Una retta isotropa conserva la proprietà dei vettori isotropi che identifica il parallelismo con la perpendicolarità, per cui una retta isotropa è perpendicolare a se stessa:

$$r \text{ isotropa} \Longrightarrow r \perp r$$

Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}$ di $\mathbb{R}^{3*}$, siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ due punti complessi distinti di una retta isotropa r, per cui $\lambda = x_2 - x_1,\ \mu = y_2 - y_1,\ \nu = z_2 - z_1$ sono le componenti di un vettore isotropo. Cioè

$$r \text{ è isotropa} \Longleftrightarrow \mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \in W\left(\mathbb{R}^{3*}\right)$$

A sua volta l'isotropia di $\mathbf{a}$ implica:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = 0$$

D'altra parte $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ è la distanza tra i punti P_1 e P_2, per cui $|P_1P_2| = 0$. Inoltre

$$\forall P_1', P_2' \in r - \{P_1, P_2\},\ \ \exists \rho \in \mathbb{C} \mid P_2' - P_1' = \rho(P_2 - P_1),$$

da cui

$$|P_1'P_2'| = \rho\,|P_1P_2| = 0, \quad \forall P_1', P_2' \in r - \{P_1, P_2\}$$

Ne consegue che la distanza tra due punti qualsiasi di una retta isotropa è nulla. Ciò si esprime dicendo che una retta isotropa è una retta di *lunghezza nulla*.

Teorema 51

$$r \text{ è isotropa} \Longleftrightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0, \tag{4.5}$$

essendo (λ, μ, ν) una qualunque terna di numeri direttori di r.

Dimostrazione.

$$r \text{ è isotropa} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathbf{a} = (\lambda, \mu, \nu) \in W\left(\mathbb{R}^{3*}\right) \Longleftrightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$$

■

Proposizione 52

$$r \text{ è isotropa} \Longleftrightarrow r^* \text{ è isotropa}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{a} = (\lambda, \mu, \nu)$ un qualunque vettore parallelo ad r, onde (λ, μ, ν) è una terna di numeri direttori di r. Per ipotesi r è isotropa, onde $\mathbf{a}$ è un vettore isotropo. Per la proposizione 47 segue che $\mathbf{a}^* = (\lambda^*, \mu^*, \nu^*)$ è isotropo, onde l'asserto. ■

Proposizione 53

$$r \text{ è isotropa} \Longrightarrow r' \text{ è isotropa}, \quad \forall r'//r$$

Dimostrazione. Una qualunque retta r' parallela alla retta isotropa assegnata r, ha numeri direttori $\lambda' = \rho\lambda,\ \mu' = \rho\mu,\ \nu' = \rho\nu,$ essendo λ, μ, ν una terna di numeri direttori di r, mentre $\rho \in \mathbb{C}$ è un coefficiente di proporzionalità. Riesce

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \rho^2 \left(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\right) \underset{\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0}{=} 0,$$

onde l'asserto. ■

Dal teorema 51 segue che una retta isotropa è necessariamente immaginaria, giacchè la (4.5) non può essere verificata da una retta reale. Quindi:

Proprietà 54

$$r \text{ è isotropa} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} r \text{ è immaginaria}$$

$$r \text{ è reale} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} r \text{ è anisotropa}$$

In altri termini, condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'isotropia è che r sia immaginaria; condizione sufficiente (ma non necessaria) per l'anisotropia è che r sia reale. Ne consegue che tutte le rette reali sono anisotrope, mentre le rette isotrope compongono un sottoinsieme delle rette immaginarie.

La relazione di parallelismo tra rette isotrope è manifestamente una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette isotrope. Una classe di equivalenza è una **direzione isotropa**.

Dal teorema 51 segue che una retta isotropa non è parallela alla propria coniugata. Infatti, per la seconda delle (3.34) si ha che una qualunque retta immaginaria parallela alla propria coniugata ha una direzione reale:

$$r \text{ è parallela alla coniugata } r^* \Longrightarrow (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \Longrightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0,$$

da cui l'anisotropia di r. Di seguito un esempio tratto da [2]:

Esempio 55 *Mostrare che le seguenti rette immaginarie:*

$$r_1 : \begin{cases} 5x + 5y + 3i\sqrt{5}z - 5 = 0 \\ i\sqrt{5}y - 2z = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} i\sqrt{2}x - z + \sqrt{2} = 0 \\ i\sqrt{2}y - z + i\sqrt{2} = 0 \end{cases},$$

sono isotrope, r_1 di prima specie, r_2 di seconda specie. Si determini il punto reale di r_1.

Studiamo la retta r_1

Una terna di numeri direttori di r_1 è data dai minori estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3i\sqrt{5} \\ 0 & i\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, presi con segni alterni. Cioè

$$\begin{vmatrix} 5 & 3i\sqrt{5} \\ i\sqrt{5} & -2 \end{vmatrix} = 5, \ - \begin{vmatrix} 5 & 3i\sqrt{5} \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 10, \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & i\sqrt{5} \end{vmatrix} = 5i\sqrt{5},$$

da cui $\left(5, 10, 5i\sqrt{5}\right) = 5\left(1, 2, i\sqrt{5}\right)$. *Dal momento che i numeri direttori sono definiti a meno di un inessenziale fattore moltiplicativo non nullo, si ha:*

$$\lambda = 1,\ \mu = 2,\ \nu = i\sqrt{5}$$

Riesce $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 + 4 - 5 = 0 \Longrightarrow r_1$ *è isotropa. Vediamo se è complanare alla propria coniugata* r_1^*.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3i & -5 \\ 5 & 5 & -3i & -5 \\ 0 & i\sqrt{5} & -2 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{5} & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

mentre il determinante ridotto è

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

per cui r_1 *e* r_1^* *sono complanari* $\Longrightarrow r_1$ *è di prima specie.*

Metodo 2

Dobbiamo risolvere il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 5x + 5y + 3i\sqrt{5}z = 5 \\ 0 + i\sqrt{5}y - 2z = 0 \\ 5x + 5y - 3i\sqrt{5}z = 5 \\ 0 - i\sqrt{5}y - 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3i\sqrt{5} \\ 0 & i\sqrt{5} & -2 \\ 5 & 5 & -3i\sqrt{5} \\ 0 & -i\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice dei coefficienti e dei temini noti si scrive

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3i\sqrt{5} & 5 \\ 0 & i\sqrt{5} & -2 & 0 \\ 5 & 5 & -3i\sqrt{5} & 5 \\ 0 & -i\sqrt{5} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il minore di ordine 3 estratto da A cancellando la primia riga:

$$A_{234,123} = \begin{vmatrix} 0 & i\sqrt{5} & -2 \\ 5 & 5 & -3i\sqrt{5} \\ 0 & -i\sqrt{5} & -2 \end{vmatrix} = 20i\sqrt{5},$$

per cui $rg\,(A) = 3$. *Passando alla matrice* B, *si trova* $rg\,(B) = 3$, *per cui il sistema è compatibile e determinato. Un suo sistema equivalente è:*

$$\begin{cases} 0 + i\sqrt{5}y - 2z = 0 \\ 5x + 5y - 3i\sqrt{5}z = 5 \\ 0 - i\sqrt{5}y - 2z = 0 \end{cases}$$

Applicando la regola di Cramer si trova $x = 1, y = 0, z = 0$, *onde l'unico punto reale di* r_1 *è* $P\,(1, 0, 0)$.

Studiamo la retta r_2

Una terna di numeri direttori di r_1 *è data dai minori estratti dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, presi con segni alterni. Cioè

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ i\sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} = i\sqrt{2}, \quad -\begin{vmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = i\sqrt{2}, \begin{vmatrix} i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2,$$

cioè

$$\lambda = 1, \ \mu = 2, \ \nu = i\sqrt{5}$$

Riesce $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 0 \Longrightarrow r_1$ *è isotropa. Per stabilire se è complanare alla propria coniugata* r_1^*, *Applichiamo l'algoritmo (40). Sia*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} i\sqrt{2} & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & -1 & i\sqrt{2} \\ 0 & -i\sqrt{2} & -1 & -i\sqrt{2} \end{vmatrix},$$

mentre il determinante ridotto è:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2\sqrt{2},$$

per cui r_2 *ed* r_2^* *non sono complanari* $\Longrightarrow r_2$ *è di seconda specie.*

Proposizione 56 *Per un assegnato punto complesso $P_0(x_0, y_0, z_0)$ passano infinite rette isotrope.*

Dimostrazione. La più generale retta isotropa per P_0 ha equazioni parametriche:

$$x = x_0 + \rho\lambda,\ y = y_0 + \rho\mu,\ z = z_0 + \rho\nu, \quad \rho \in \mathbb{C} \tag{4.6}$$

essendo (λ, μ, ν) una qualunque terna di numeri direttori della suddetta retta. L'isotropia di r implica (teorema 51)

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \tag{4.7}$$

L'asserto segue dall'esistenza di infinite terne ordinate di numeri complessi (λ, μ, ν) non tutti nulli tali da verificare la (4.7). ■

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 57 *Dicesi* ***sfera immaginaria*** *di centro $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$ e raggio $R \in \mathbb{C}$, l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{3*}$*

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{3*} \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\right\}$$

Sviluppando i quadrati nell'equazione di Γ si ottiene:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 + z^2 - 2z_0z + z_0^2 - R^2 = 0$$

Poniamo

$$a \overset{def}{=} -2x_0,\ b \overset{def}{=} -2y_0,\ c \overset{def}{=} -2z_0,\ d \overset{def}{=} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2, \tag{4.8}$$

per cui

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \tag{4.9}$$

Per quanto precede è $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$ per cui $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Se invece $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dalle (4.8) segue $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, per cui $R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d$ è un numero reale. Più precisamente, abbiamo i seguenti casi:

1. $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > d \Longrightarrow R^2 > 0$, quindi Γ è la sfera di centro $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e di raggio $R \equiv +\sqrt{R^2}$, cioè la sfera reale di centro P_0 e raggio $R > 0$. Ad esempio, per $a = b = c = 0$ e $d = -1$, Γ è la sfera di centro l'origine e di raggio unitario (cfr. fig. 4.1).

2. $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > d \Longrightarrow R = 0$, quindi Γ è la sfera di centro $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e di raggio nullo, cioè $\Gamma = \{P_0\}$.

3. $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < d \Longrightarrow R^2 < 0$, quindi Γ è la sfera di centro $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e di raggio $R \equiv i\sqrt{-R^2}$. Ad esempio, per $a = b = c = 0$ e $d = 1$, Γ è la sfera di centro l'origine e di raggio i.

Il caso 1 contempla l'usuale sfera dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Nel caso 3 abbiamo, invece, una sfera di centro $P_0 \in \mathbb{R}^3$, ma di raggio immaginario puro. Tale luogo geometrico è manifestamente privo di punti reali. È interessante ricavare una rappresentazione parametrica di una sfera di raggio immaginario puro. Senza perdita di generalità supponiamo che Γ sia centrata nell'origine, onde $a = b = c = 0$ e

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = -R^2$$

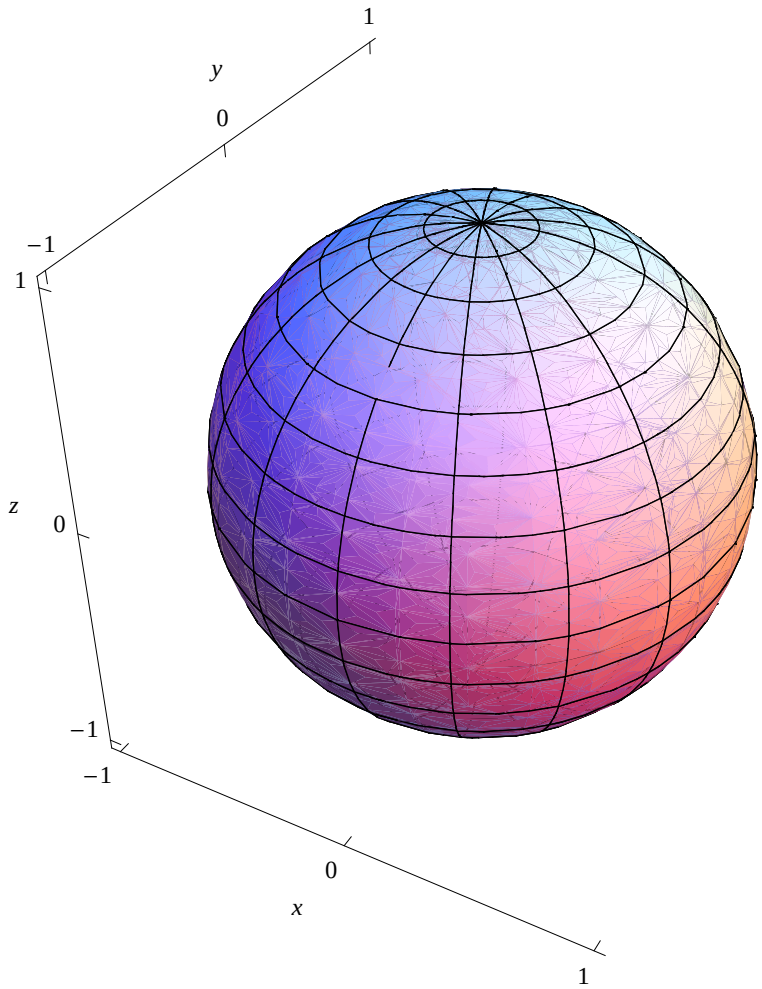


Figura 4.1: Se i coefficienti a, b, c sono tutti nulli e $d = -1$, la (4.9) è l'equazione della sfera reale di centro l'origine del riferimento cartesiano e di raggio unitario.

Passiamo dal sistema di coordinate cartesiane nello spazio euclideo reale $\mathbb{R}^3$ a un sistema di coordinate polari (r, θ, φ) con polo nell'origine[1]:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \ y = r \sin\theta \sin\varphi, \ z = r \cos\theta$$

Una rappresentazione parametrica di una sfera centrata nell'origine e di raggio $R > 0$ è

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \ y = R \sin\theta \sin\varphi, \ z = R \cos\theta, \quad (\theta, \varphi) \in B,$$

essendo $B = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ l'intervallo base della rappresentazione. Ne consegue che una rappresentazione parametrica di una sfera centrata nell'origine e di raggio immaginario puro $i\sqrt{-R^2}$ è

$$x = i\sqrt{-R^2} \sin\theta \cos\varphi, \ y = i\sqrt{-R^2} \sin\theta \sin\varphi, \ z = i\sqrt{-R^2} \cos\theta, \quad (\theta, \varphi) \in B,$$

Ritornando al caso in cui i coefficienti dell'equazione di Γ sono complessi, sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 58 *La sfera immaginaria di raggio nullo centrata in* $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$

$$\Gamma_0 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0, \tag{4.10}$$

contiene infiniti punti.

Dimostrazione. Passiamo dal riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxyz)$ al riferimento traslato $\mathcal{R}'(P_0XYZ)$, per cui le equazioni di trasformazione delle coordinate si scrivono:

$$X = x - x_0, \ Y = y - y_0, \ Z = z - z_0 \tag{4.11}$$

Nel riferimento $\mathcal{R}'(P_0XYZ)$ l'equazione (4.10) diventa:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \tag{4.12}$$

Riesce

$$X, Y, Z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists\infty (X, Y, Z) \neq (0, 0, 0) \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

da cui l'asserto. ■

Esiste dunque una deviazione dal comportamento reale, giacchè la sfera reale di centro P_0 e raggio nullo contiene come unico punto il centro medesimo. Consideriamo ora alcuni casi notevoli. Denotiamo con $\Gamma_{0,x}$ la sfera immaginaria di raggio nullo centrata in $(i\xi_0, 0, 0)$ con $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione di $\Gamma_{0,x}$ con il piano coordinato xy. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} (x - i\xi_0)^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y^2 + z^2 = \xi_0^2$$

Cioè $\Gamma_{0,x}$ interseca il piano coordinato yz secondo la circonferenza $\gamma_{0,yz}$ centrata nell'origine e di raggio $|\xi_0|$. Alla stessa maniera procediamo per la sfera immaginaria $\Gamma_{0,y}$ di raggio nullo e centrata in $(0, i\eta_0, 0)$ (con $\eta_0 \in \mathbb{R}$). Più precisamente, determiniamo l'intersezione di $\Gamma_{0,y}$ con il piano coordinato xz, ottenendo la circonferenza $\gamma_{0,yz}$ centrata nell'origine e di raggio $|\eta_0|$. Infine, se $\Gamma_{0,z}$ è la sfera immaginaria di raggio nullo centrata in $(0, 0, i\zeta_0)$ (con $\zeta_0 \in \mathbb{R}$), segue che la sua intersezione con il piano coordinato xz è la circonferenza $\gamma_{0,xy}$ centrata nell'origine e di raggio $|\zeta_0|$.

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione

[1] Ricordiamo che r, θ, φ sono rispettivamente il raggio vettore, la longitudine e la colatitudine di un generico punto di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 59 *Dicesi* ***cono isotropo*** *di vertice* $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$, *il luogo dei punti appartenenti a tutte e sole le rette isotrope per* P_0.

Tale definizione è ben posta, giacchè per la proposizione 56 esistono infinite rette isotrope per P_0.

Proposizione 60 *Il cono isotropo di vertice* $P_0 \in \mathbb{R}^{3*}$ *è la sfera di raggio nullo centrata in* P_0.

Dimostrazione. Denotiamo con Σ_0 il cono isotropo di vertice $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$. Comunque prendiamo un punto $Q \in \Sigma_0$, esiste - per definizione di cono isotropo - una retta isotropa per Q e P_0, onde è $|QP_0| = 0$, cioè $\Sigma_0 = \Gamma_0$. ■

Da tale proposizione segue

$$\Sigma_0 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0 \tag{4.13}$$

Denotiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia dei piani immaginari passanti per $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$, onde

$$\alpha \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\} \mid \alpha : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Per quanto precede, una retta isotropa per P_0 ha una rappresentazione parametrica del tipo (4.6), onde:

$$r \subset \alpha \Longleftrightarrow a(x_0 + \rho\lambda - x_0) + b(y_0 + \rho\lambda - y_0) + c(z_0 + \rho\nu - z_0) = 0$$

Cioè $r \subset \alpha$ se e solo se

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \tag{4.14}$$

Assegnato $\alpha \in \mathcal{F}$, impostiamo il sistema omogeneo di secondo grado in λ, μ, ν

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}, \tag{4.15}$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le soluzioni non banali di (4.15) sono le terne di numeri direttori di tutte e sole le rette isotrope per P_0 e contenute in α. Studiamo, dunque, la compatibilità di (4.15) scartando la soluzione banale $\lambda = \mu = \nu = 0$. Senza perdita di generalità, supponiamo $a \neq 0$ che ci consente di eliminare l'incognita λ. Più precisamente, ricaviamo λ dalla prime delle (4.15)

$$\lambda = -\frac{1}{a}(b\mu + c\nu), \tag{4.16}$$

per poi sostituirla nella seconda, ottenendo

$$\frac{1}{a^2}(b\mu + c\nu)^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$$

Sviluppando e ordinando i vari termini otteniamo la seguente equazione algebrica di secondo grado in μ

$$\left(a^2 + b^2\right)\mu^2 + (2bc\nu)\mu + \left(a^2 + c^2\right)\nu^2 = 0, \tag{4.17}$$

avendo assunto l'incognita ν come parametro (complesso) indipendente. Le radici di (4.17) sono

$$\mu_{1,2} = \frac{-bc \pm \sqrt{-a^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}}{a^2 + b^2}\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{C} \tag{4.18}$$

Distinguiamo i due casi[2]:

[2]Ricordiamo che $a, b, c \in \mathbb{C}$, per cui $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \nRightarrow a = b = c = 0$. Ad esempio, $a = \sqrt{2},\ b = i,\ c = i \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

1. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$
2. $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

Nel caso 1 si ha

$$\mu_{1,2} = \frac{-bc \pm \sqrt{-a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{a^2+b^2}\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Dalla (4.16)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{a}\left(b\mu_{1,2} + c\nu\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Ne consegue che se $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ il sistema (4.15) ammette una doppia infinità di soluzioni (λ_1, μ_1, ν) e (λ_2, μ_2, ν) al variare di ν in $\mathbb{C}$ o, ciò che è lo stesso, due soluzioni definite a meno di un parametro indipendente. A tali soluzioni corrispondono due rette isotrope distinte. In altri termini, se il piano $\alpha \in \mathcal{F}$ è tale che $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, esistono due rette isotrope passanti per P_0 e contenute in α. Nel caso 2:

$$\mu = -\frac{bc}{a^2+b^2}\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Dalla (4.16)

$$\lambda = -\frac{ac}{a^2+b^2}\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{C},$$

per cui il sistema (4.15) ammette un'unica infinità di soluzioni

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\nu, -\frac{bc}{a^2+b^2}\nu, \nu\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{C} \tag{4.19}$$

Ne concludiamo che se i coefficienti complessi a, b, c dell'equazione del piano $\alpha \in \mathcal{F}$ sono tali che $a^2+b^2+c^2 = 0$, esiste ed è unica la retta isotropa per P_0, contenuta in α.

Osservazione 61 *Osserviamo che il sistema (4.15) non contiene le coordinate (x_0, y_0, z_0) del punto assegnato P_0. Ne consegue che se il piano $\alpha \in \mathcal{F}$ è tale che $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ (in particolare, se α è reale), le rette isotrope contenute in α compongono due fasci impropri di rette, giacchè per la proposizione 53 una qualunque retta parallela a una retta isotropa è a sua volta una retta isotropa. Di contro, se $a^2+b^2+c^2 = 0$ le rette isotrope contenute in α compongono un unico fascio improprio di rette.*

Esempio 62 *Sia $P_0(0, -i, 1)$ e $\alpha : x + 2(y+i) + 4i(z-1) = 0$, onde $a = 1,\ b = 2,\ c = 4i$. Quindi*

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 4i\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\lambda = -\left(2\mu + 4i\nu\right), \tag{4.20}$$

che sostituita nella seconda porge

$$5\mu^2 + (16i\nu)\mu - 15\nu^2 = 0,$$

le cui radici sono

$$\mu_{1,2} = \frac{-8i\nu \pm \nu\sqrt{11}}{5} = -\frac{\nu}{5}\left(8i \mp \sqrt{11}\right)$$

Per la (4.20) deve essere

$$\lambda_{1,2} = -\left(2\mu_{1,2} + 4i\nu\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Riesce

$$\lambda_1 = -\left(-\frac{16}{5}i\nu + \frac{2}{5}\nu\sqrt{11} + 4i\nu\right)$$

Cioè

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{5}\nu\left(\sqrt{11} + 2i\right) \\ \mu_1 = \frac{\nu}{5}\left(\sqrt{11} - 8i\right) \end{cases}, \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Passiamo alla seconda radice

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\left(2\mu_2 + 4i\nu\right) \\ &= -\left(-\frac{16}{5}i\nu - \frac{2}{5}\nu\sqrt{11} + 4i\nu\right), \\ &= -\frac{2}{5}\nu\left(2i - \sqrt{11}\right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{2}{5}\nu\left(\sqrt{11} - 2i\right) \\ \mu_2 = -\frac{\nu}{5}\left(\sqrt{11} + 8i\right) \end{cases}, \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Esistono dunque due rette isotrope r_1 e r_2 per P_0 e contenute in α.

$$r_1\left(\lambda_1, \mu_1, \nu\right), \; r_2\left(\lambda_2, \mu_2, \nu\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo l'isotropia di r_1 e r_2. Abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu^2 &= \frac{4}{25}\nu^2\left(\sqrt{11} + 2i\right)^2 + \frac{\nu^2}{25}\left(\sqrt{11} - 8i\right)^2 + \nu^2 \\ &= \frac{4}{25}\left(11 + 4i\sqrt{11} - 4\right)\nu^2 + \frac{1}{25}\left(11 - 16i - 64\right)\nu^2 + \nu^2 \\ &= \frac{\nu^2}{25}\left(44 + 16i\sqrt{11} - 16 + 11 - 16i\sqrt{11} - 64 + 25\right) \\ &= 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Alla stessa maniera si giunge a

$$\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu^2 = 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{C}$$

Assumendo $\nu = 5$, possiamo scrivere le equazioni di tali rette

$$\begin{cases} r_1 : -\frac{x}{2\left(\sqrt{11}+2i\right)} = \frac{y+i}{\sqrt{11}-8i} = \frac{z-1}{5} \\ r_2 : \frac{x}{2\left(\sqrt{11}-2i\right)} = -\frac{y+i}{\sqrt{11}+8i} = \frac{z-1}{5} \end{cases}$$

4.3 Piano isotropo

Riprendiamo il sistema (4.15):

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

Ricordiamo che la prima equazione esprime l'appartenenza della retta r al piano α o, ciò che è lo stesso, alla giacitura definita dalla terna ordinata $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. La seconda equazione invece, esprime l'isotropia di r. Abbiamo poi visto che la dipendenza delle soluzioni dai parametri a, b, c avviene attraverso il numero complesso $a^2 + b^2 + c^2$. Più precisamente se $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, esistono due famiglie di soluzioni (λ_1, μ_1, ν) e (λ_2, μ_2, ν) ciascuna definita a meno del parametro indipendente ν. Se invece $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, il sistema ammette una ed una sola famiglia di soluzioni (λ, μ, ν) definita a meno del parametro indipendente ν. Geometricamente, nel primo caso si hanno due direzioni isotrope (λ_1, μ_1, ν), (λ_2, μ_2, ν) o, ciò che è lo stesso, due fasci impropri di rette isotrope appartenenti alla giacitura (a, b, c). Viceversa, se $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ la giacitura (a, b, c) contiene una ed una sola direzione isotropa (λ, μ, ν) i.e. uno ed un solo fascio improprio di rette isotrope.

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 63 *Un **piano isotropo** è un piano immaginario $ax + by + cz + d = 0$ tale che*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \tag{4.22}$$

*Un **piano anisotropo** è un piano non isotropo, cioè tale che $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.*

Rammentando la condizione di perpendicolarità tra due piani, vediamo che $a^2+b^2+c^2 = 0$ implica che un piano isotropo è perpendicolare a se stesso:

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Longrightarrow \alpha \perp \alpha$$

Inoltre, dalla (4.22) segue che un piano isotropo non è parallelo al proprio coniugato. Infatti, per la seconda delle (3.27) si ha che un qualunque piano immaginario parallelo al proprio coniugato ha una giacitura reale:

$$\alpha \text{ è parallelo al coniugato } \alpha^* \Longrightarrow (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

da cui l'anisotropia di α. Le considerazioni di inizio paragrafo assieme alla definizione 63 implicano la seguente la proprietà:

Proprietà 64 *Un piano isotropo contiene uno ed un solo fascio improprio di rette isotrope. Un piano anisotropo contiene due fasci impropri di rette isotrope.*

Proposizione 65 *Un piano isotropo è ortogonale a ogni retta isotropa del fascio improprio di rette isotrope ivi contenuto.*

Dimostrazione. Una dimostrazione "intuitiva" è la seguente: dal momento che un piano isotropo è perpendicolare a se stesso, necessariamente riesce perpendicolare a ogni retta contenuta nel piano medesimo, comprese le rette isotrope. Per essere più rigorosi, denotiamo con $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ l'unico fascio improprio di rette isotrope contenuto nel piano isotropo $\alpha : ax + by + cz + d = 0$. Comunque prendiamo $r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di numeri direttori λ, μ, ν, riesce

$$0 \underset{r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)}{=} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \underset{a^2+b^2+c^2=0}{=} \rho^2 \left(a^2 + b^2 + c^2\right), \quad \forall \rho \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Cioè:

$$\left(\lambda^2 - \rho^2 a^2\right) + \left(\mu^2 - \rho^2 b^2\right) + \left(\nu^2 - \rho^2 c^2\right) = 0, \quad \forall \rho \in \mathbb{C} - \{0\},$$

da cui:

$$\lambda = \rho a, \;\; \mu = \rho b, \;\; \nu = \rho c,$$

che è la condizione di perpendicolarità tra r e α. ■

Da tale proposizione segue che comunque prendiamo nello spazio complesso una direzione isotropa (λ, μ, ν), la giacitura ad essa perpendicolare è isotropa e contiene la suddetta direzione. Viceversa, comunque prendiamo nello spazio complesso una giacitura isotropa (a, b, c), esiste una ed una sola direzione isotropa (λ, μ, ν) ivi contenuta e ad essa perpendicolare. Queste conclusioni sono del tutto anti-intuitive giacchè data una qualunque direzione (λ, μ, ν) nello spazio reale $\mathbb{R}^3$, la giacitura ad essa ortogonale non può contenere la suddetta direzione, come illustrato in fig. 4.2. Peraltro, l'"anti-intuitività" di tale comportamento deriva dal senso comune. Quest'ultimo è ereditato dalla nostra percezione dello spazio reale. Di contro, nello spazio complesso è esattamente ciò che ci si aspetta in virtù del concetto stesso di isotropia che identifica il parallelismo con l'ortogonalità (Proposizione 45).

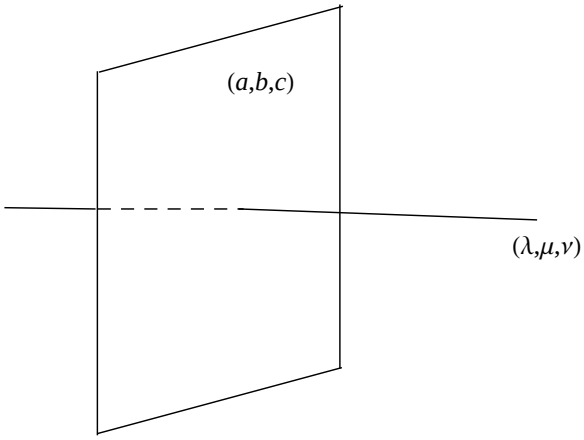


Figura 4.2: La terna ordinata (λ, μ, ν) definisce una direzione nello spazio reale $\mathbb{R}^3$, e quindi la giacitura (a, b, c) ad essa ortogonale.

Osservazione 66 *L'unicità della direzione isotropa (λ, μ, ν) contenuta nella giacitura isotropa (a, b, c) segue anche dalla proprietà 64. Detto diversamente, per una retta isotropa passa uno ed un solo piano isotropo. Ne consegue, inoltre, che l'intersezione di due piani isotropi è una retta anisotropa.*

Le considerazioni precedenti si riassumono efficacemente in modalità simbolica:

$$(\lambda, \mu, \nu) \text{ isotropa} \longrightarrow (a, b, c) \text{ isotropa perpendicolare a } (\lambda, \mu, \nu) \text{ e contenente } (\lambda, \mu, \nu)$$

Cioè a ogni direzione isotropa possiamo associare una giacitura isotropa contenente tale direzione e ad essa perpendicolare. Viceversa:

$$(a,b,c) \text{ isotropa} \longrightarrow (\lambda,\mu,\nu) \text{ isotropa contenuta in } (a,b,c) \text{ e ad essa perpendicolare}$$

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

Proposizione 67 *I fasci impropri di rette isotrope contenute in un piano reale, sono l'uno il coniugato dell'altro.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che un piano reale α è anisotropo, onde per la proprietà 64 contiene due fasci impropri $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$ e $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$ di rette isotrope. Comunque prendiamo $r \in \mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$, dalla realtà di α segue che $r^* \subset \alpha$, dove r^* è la coniugata di r che a sua volta, è una retta isotropa (proposizione 52). Dal momento che r non può essere parallela a r^*, si ha necessariamente $r^* \in \mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$, onde $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha) = \left(\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)\right)^*$, cioè l'asserto. ■

Sia $P_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^{3*}$ un generico punto di un piano isotropo α. Se $r_0 \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ tale che $r_0 \in P_0$, riesce:

$$\alpha \cap \Sigma_0 = r_0 \Longrightarrow \alpha \text{ è tangente a } \Sigma_0 \text{ in } P_0,$$

essendo Σ_0 il cono isotropo di vertice P_0. Dall'arbitarietà di $P_0 \in \alpha$, segue la seguente proprietà:

Proprietà 68 *Un piano isotropo è tangente a ogni cono isotropo con vertice su di esso.*

***

Esistono due problemi tipici relativi a piani e rette isotrope, che sono l'uno l'inverso dell'altro. Precisamente:

Problema 69 *Assegnata una retta isotropa r, determinare l'equazione dell'unico piano isotropo passante per r.*

Problema 70 *Assegnato un piano isotropo α, determinare l'equazione dell'unico fascio improprio di rette isotrope di α.*

Riguardo al procedimento per risolvere i Problemi 69 e 70, ricordiamo preliminarmente che assegnato un piano isotropo α di equazione:

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{4.23}$$

i numeri direttori di $r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ risolvono il sistema (4.21). In simboli:

$$r(\lambda,\mu,\nu) \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha) \mid \begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Una soluzione particolare di tale sistema è (a,b,c), cioè la giacitura del piano isotropo assegnato. Ne consegue che (a,b,c) è una terna di numeri direttori di r e come tale definisce la direzione del fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ delle rette isotrope di α. Ne consegue che comunque prendiamo $P_0(x_0,y_0,z_0) \in \alpha$, l'equazione di

$$r_0 \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha) \mid P_0 \in r_0$$

si scrive:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \tag{4.24}$$

Viceversa, assegnata una retta isotropa $r \ni P_0'(x_0', y_0', z_0')$, l'unico piano isotropo contenente tale retta ha equazione:

$$\lambda(x-x_0')+\mu(y-y_0')+\nu(z-z_0')=0, \tag{4.25}$$

essendo (λ, μ, ν) una terna ordinata di numeri direttori di r. La formula (4.25) risolve il Problema 69. Passiamo ora al Problema 70. Dobbiamo determinare l'equazione del fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ delle rette isotrope del piano isotropo α. Sia

$$\alpha' : a'x+b'y+c'z+d'=0,$$

un generico piano parallelo a una qualunque retta $r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)$. Dalla condizione di parallelismo tra una retta e un piano segue

$$a'\lambda+b'\mu+c'\nu=0$$

Ma abbiamo appena visto che una terna di numeri direttori di r è (a, b, c) onde l'equazione precedente si scrive:

$$aa'+bb'+cc'=0, \tag{4.26}$$

che è un'equazione lineare nelle incognite (a', b', c') e come tale ammette ∞^2 soluzioni. E ogni soluzione non banale definisce un piano parallelo alle rette isotrope di α. Denotando con (a_1', b_1', c_1') la soluzione generale della (4.26) si ha che l'equazione del suddetto piano è:

$$a_1'x+b_1'y+c_1'z+d'=0$$

In tale equazione è indeterminato il coefficiente d' e assumendolo come parametro, otteniamo l'equazione del fascio $\Phi(\alpha)$ di piani paralleli alle rette isotrope di α:

$$\Phi(\alpha) : a_1'x+b_1'y+c_1'z+k=0, \quad \forall k \in \mathbb{C}$$

Riesce manifestamente:

$$\forall \alpha' \in \Phi(\alpha), \ \alpha' \cap \alpha = r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha),$$

per cui una rappresentazione ordinaria di $r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ è:

$$r : \begin{cases} a_1'x+b_1'y+c_1'z+k=0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{C} \tag{4.27}$$

È chiaro che al variare di $k \in \mathbb{C}$, la (4.27) fornisce l'equazione del fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$:

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} a_1'x+b_1'y+c_1'z+k=0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{4.28}$$

Esercizio 71 *(Il testo di questo esercizio è tratto da [2]). Assegnato il piano isotropo:*

$$\alpha : 3x+4y+5iz-1=0, \tag{4.29}$$

determinare:

1. *l'equazione dell'unico fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di rette isotrope di α;*
2. *l'equazione (nella forma dei rapporti uguali) della retta isotropa contenuta in α e incidente l'asse z.*

Svolgimento
La (4.26) si scrive

$$3a' + 4b' + 5ic' = 0 \tag{4.30}$$

Assumiamo come parametri indipendenti le incognite b' e c', per cui la (4.30) ammette le ∞^2 soluzioni:

$$a' = -\frac{1}{3}(4+5i), \; b' = \rho, \; c' = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo la soluzione particolare determinata da $\rho_1 = 1, \; \sigma_1 = 1$:

$$a'_1 = -\frac{1}{3}(4+5i), \; b'_1 = 1, \; c'_1 = 1,$$

per cui la (4.28) si scrive:

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} (4+5i)\,x - 3y - 3z + k = 0 \\ 3x + 4y + 5iz - 1 = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{4.31}$$

Per risolvere il quesito 2 denotiamo con r_0 la retta appartenente al fascio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ e incidente l'asse z. È chiaro che r_0 incide l'asse z se e solo se passa per $P(0,0,z_0) \in \alpha$. Dalla seconda delle (4.31):

$$5iz_0 - 1 = 0 \Longrightarrow z_0 = -\frac{i}{5}$$

Sostituendo le coordinate di P nella prima delle (4.31) otteniamo il valore k_0 di k che nel fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ individua la retta r_0:

$$\frac{3}{5}i + k = 0 \Longrightarrow k_0 = -\frac{3}{5}i,$$

per cui una rappresentazione ordinaria di r_0 è

$$r_0 : \begin{cases} (4+5i)\,x - 3y - 3z - \frac{3}{5}i = 0 \\ 3x + 4y + 5iz - 1 = 0 \end{cases} \tag{4.32}$$

Per scrivere l'equazione di r_0 nella forma dei rapporti uguali, determiniamo i numeri direttori di r_0 con il solito procedimento:

$$\lambda = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 5i \end{vmatrix} = 12 - 15i, \; \mu = \begin{vmatrix} -3 & 4+5i \\ 5i & 3 \end{vmatrix} = 16 - 20i, \; \nu = \begin{vmatrix} 4+5i & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 25 + 20i,$$

onde l'equazione di r_0 è

$$\begin{aligned} & \frac{x}{12-15i} = \frac{y}{16-20i} = \frac{z+\frac{i}{5}}{25+20i} \\ \Longleftrightarrow\; & \frac{x}{12-15i} = \frac{y}{16-20i} = -\frac{i}{5}\frac{5iz-1}{25+20i} \\ \Longleftrightarrow\; & \frac{x}{3(4-5i)} = \frac{y}{4(4-5i)} = -\frac{1}{25}\frac{5iz-1}{4-5i} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$r_0 : \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = -\frac{5iz-1}{25} \tag{4.33}$$

L'esercizio appena risolto è del tipo Problema 70. Possiamo invertire il procedimento in modo da passare al Problema 69. In altri termini, supponiamo che sia assegnata la retta isotropa la retta isotropa (4.32) che ridefiniamo con r:

$$r : \begin{cases} (4+5i)\,x - 3y - 3z - \frac{3}{5}i = 0 \\ 3x + 4y + 5iz - 1 = 0 \end{cases}, \tag{4.34}$$

e determiniamo l'equazione dell'unico piano isotropo passante per r (cioè il piano (4.29)). Dobbiamo applicare la formula (4.25) che qui scriviamo nella forma:

$$\lambda\,(x - x_0) + \mu\,(y - y_0) + \nu\,(z - z_0) = 0, \tag{4.35}$$

dove λ, μ, ν sono i numeri direttori di r, mentre $(x_0, y_0, z_0) \in r$. Per quanto precede si ha:

$$\lambda = 12 - 15i, \;\; \mu = 16 - 20i, \;\; \nu = 25 + 20i$$

Non ci resta che determinare (x_0, y_0, z_0). A tale scopo è conveniente riferirsi all'equazione (4.33). Ad esempio, se $z_0 = 0$ si ha $x_0 = \frac{3}{25}$, $y_0 = \frac{4}{25}$. Quindi la (4.35) diventa:

$$\begin{aligned} & (12-15i)\left(x - \frac{3}{25}\right) + (1620i)\left(y - \frac{4}{25}\right) + (25+20i)\,z = 0 \\ \iff & (12-15i)\,x - \frac{36}{25} + \frac{9}{5}i + (16-20i)\,y - \frac{64}{25} + \frac{16}{5}i + (25+20i)\,z = 0 \\ \iff & (12-15i)\,x + (16-20i)\,y + (25+20i)\,z - 4 + 5i = 0 \\ \iff & 3\,(4-5i)\,x + 4\,(4-5i)\,y + 5i\,(4-5i)\,z - (4-5i) = 0 \end{aligned}$$

Dividendo primo e secondo membro dell'ultima equazione per il numero complesso $4 - 5i$, si ottiene:

$$3x + 4y + 5iz - 1 = 0,$$

cioè l'equazione (4.29).

Esercizio 72 *(Testo tratto da [2]). Determinare l'equazione dell'unico piano isotropo passante per la retta isotropa:*

$$r : \begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ x + 3y - 3iz + 3 = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Dobbiamo applicare la formula (4.25) che qui scriviamo nella forma:

$$\lambda\,(x - x_0) + \mu\,(y - y_0) + \nu\,(z - z_0) = 0,$$

dove λ, μ, ν sono i numeri direttori di r, mentre $(x_0, y_0, z_0) \in r$. Applichiamo il solito procedimento per la ricerca di λ, μ, ν, ovvero calcolando i minori del secondo ordine di

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -3i \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con sogni alterni:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3i \end{vmatrix} = 9i, \quad - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3i & 1 \end{vmatrix} = 12i\,, \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

Cioè $(9i, 12i, 15) = 3i\,(3, 4, -5i)$, *onde*

$$\lambda = 3, \;\; \mu = 4, \;\; \nu = -5i,$$

avendosi $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$, *come doveva essere. Per determinare* $(x_0, y_0, z_0) \in r$ *passiamo dalla rappresentazione ordinaria dir ad una sua rappresentazione parametrica assumendo* z *come parametro, per cui abbiamo il sistema lineare:*

$$\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ x + 3y = 3i\rho - 3 \end{cases}$$

Procedendo per sostituzione:

$$x = -3y + 3i\rho - 3,$$

che sostituita nella prima:

$$-12y + 12i\rho - 12 - 3y = -3 \Longrightarrow y = \frac{1}{5}\left(-3 + 4i\rho\right)$$

Quindi una rappresentazione parametrica di r *è:*

$$x = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\rho, \;\; y = \frac{1}{5}\left(-3 + 4i\rho\right), \;\; z = \rho, \quad \rho \in \mathbb{C}$$

Per $\rho = \rho_0 = 0$ *si ha* $x_0 = -\frac{6}{5}$, $y_0 = \frac{3}{5}$, $z_0 = 0$, *onde l'equazione del piano* α *si scrive:*

$$3x + 4y - 5iz + 6 = 0$$

Passiamo ora ai problemi relativi alle rette isotrope contenute in un piano anisotropo. Per quanto precede, il piano anisotropo

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \tag{4.36}$$

contiene due fasci impropri $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$ e $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$ di rette isotrope, i cui numeri direttori sono le soluzioni del sistema (4.15):

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che nel caso $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tale sistema ammette due famiglie di soluzioni definite a meno di un parametro. E a tali famiglie corrispondono i fasci $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$ e $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$.

Esempio 73 *Determiniamo i fasci impropri di rette isotrope contenute nel piano anisotropo*

$$x + iy - z = 0$$

Il sistema (4.15) si scrive:

$$\begin{cases} \lambda + i\mu - \nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo λ dalla prima:

$$\lambda = -\left(i\mu - \nu\right),$$

che sostituita nella seconda:

$$\nu\left(\nu - i\mu\right) = 0 \Longleftrightarrow \nu_1 = 0,\ \nu_2 = i\mu$$

Quindi

$$\begin{cases} \lambda_1 = -i\rho,\ \mu_1 = \rho,\ \nu_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0,\ \mu_2 = \sigma,\ \nu_2 = i\sigma \end{cases},\quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo le soluzioni particolari:

$$\begin{cases} \lambda_1 = i,\ \mu_1 = -1,\ \nu_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \nu_2 = i \end{cases},$$

da cui vediamo che una qualunque retta del fascio $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$ giace in un piano parallelo al piano coordinato xy, mentre una qualunque retta del fascio $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$ giace in un piano parallelo al piano coordinato yz. Denotando con Ψ_{xy} e Ψ_{yz} i fasci impropri di piani paralleli al piano xy e al piano yz rispettivamente, si ha

$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha),\ \exists \beta \in \Psi_{xy} \mid r = \alpha \cap \beta$$
$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha),\ \exists \gamma \in \Psi_{yz} \mid r = \alpha \cap \gamma$$

Ne consegue l'equazione dei fasci $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$, $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$:

$$\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha) : \begin{cases} x + iy - z = 0 \\ z = k \end{cases},\quad \forall k \in \mathbb{C}$$
$$\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha) : \begin{cases} x + iy - z = 0 \\ x = k \end{cases},\quad \forall k \in \mathbb{C}$$

Alternativamente, si può procedere nel seguente modo. Assegnato il piano anisotropo (4.36), la più generale retta ivi contenuta ha una rappresentazione ordinaria:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

con (a', b', c') non proporzionale a (a, b, c). I numeri direttori di r si ottengono con il solito procedimento applicato alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

ovvero λ, μ, ν sono i minori del secondo ordine estratti da M cancellando la prima, seconda e terza colonna e presi con segni alterni:

$$\lambda = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c,\ \mu = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = a'c - ac',\ \nu = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Imponendo l'isotropia

$$\left(bc' - b'c\right)^2 + \left(-ac' + a'c\right)^2 + \left(ab' - a'b\right)^2 = 0 \tag{4.37}$$

Sviluppando i quadrati e ordinando i vari termini, si ottiene:

$$\left(b^2+c^2\right)a'^2-2a\left(b\rho+c\sigma\right)a'-2bc\rho\sigma+a^2\left(\rho^2+\sigma^2\right)+b^2\sigma^2=0, \tag{4.38}$$

avendo assunto le incognite b', c' come parametri:

$$b'=\rho,\ c'=\sigma,\quad \forall\rho,\sigma\in\mathbb{C}$$

La (4.38) è un'equazione di secondo grado in a' che ammette ∞^2 soluzioni

$$\left(a',\rho,\sigma\right),\ \ \forall\rho,\sigma\in\mathbb{C}$$

Precisamente, se $b^2+c^2\neq 0$

$$a'_{\pm}=\frac{a\left(b\rho+c\sigma\right)\pm\sqrt{a^2\left(b\rho+c\sigma\right)^2-\left(b^2+c^2\right)\left[-2bc\rho\sigma+a^2\left(\rho^2+\sigma^2\right)\right]}}{b^2+c^2}$$

Esempio 74 *(Testo tratto da [2]). Determiniamo i fasci impropri di rette isotrope contenute nel piano reale*

$$\alpha: x+y-z+1=0$$

Qui è $a=b=1$, $c=-1$, *onde la (4.37) si scrive:*

$$\begin{aligned}&\left(b'+c'\right)^2+\left(-a'-c'\right)^2+\left(b'-a'\right)^2=0\\ \Longleftrightarrow\ &\left(b'+c'\right)^2+\left(a'+c'\right)^2+\left(a'-b'\right)^2=0\end{aligned}$$

Ponendo $b'=c'=1$

$$a'^2+3=0\iff a'=\pm i\sqrt{3}$$

Quindi abbiamo le soluzioni $\left(i\sqrt{3},1,1\right)$, $\left(-i\sqrt{3},1,1\right)$ *a cui corrispondono i fasci impropri:*

$$\mathcal{F}_{iso}^{(1)}\left(\alpha\right)=\begin{cases}:x+y-z+1=0\\ i\sqrt{3}x+y+z+k=0\end{cases},\ \ \forall k\in\mathbb{C}$$

$$\mathcal{F}_{iso}^{(2)}\left(\alpha\right)=\begin{cases}:x+y-z+1=0\\ -i\sqrt{3}x+y+z+k=0\end{cases},\ \ \forall k\in\mathbb{C}$$

Si noti che $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}\left(\alpha\right)=\left(\mathcal{F}_{iso}^{(1)}\left(\alpha\right)\right)^*$ *in accordo con la proposizione 67.*

Esempio 75 *(Testo tratto da [2]). Determiniamo i piani isotropi passanti per la retta*

$$r: x=y=z \tag{4.39}$$

Svolgimento.

La retta assegnata è manifestamente reale, per cui è data dall'intersezione di due piani isotropi. Se (λ,μ,ν) *è una qualunque terna ordinata di numeri direttori di* r, *e se* (a,b,c) *è una giacitura isotropa* r, *deve essere:*

$$\begin{cases}a\lambda+b\mu+c\nu=0\\ a^2+b^2+c^2=0\end{cases} \tag{4.40}$$

dove la prima equazione rappresenta il passaggio di $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ *per* r*, mentre la seconda l'isotropia di* α*. Si tratta di un sistema omogeneo di secondo grado in* a, b, c*. Dalla (4.39) segue* $\lambda = \mu = \nu = 1$*, onde il sistema (4.40) si scrive:*

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

Ricaviamo c *dalla prima:*

$$c = -(a + b) \tag{4.42}$$

per poi sostituirla nella seconda:

$$b^2 + ab + a^2 = 0$$

Assumendo l'incognita a *come parametro, abbiamo:*

$$b = \frac{-a \pm \sqrt{-3a^2}}{2}, \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Per $a = 1$*:*

$$b_1 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \; b_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Dalla (4.42) segue $c_{1,2} = -(1 + b_{1,2})$*, cioè:*

$$c_1 = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \; c_2 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Abbiamo dunque le soluzioni:

$$\left(1, -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right),$$

che sono le giaciture dei piani isotropi:

$$\begin{aligned} \alpha &: 2x - \left(1 + i\sqrt{3}\right) x - \left(1 - i\sqrt{3}\right) y = 0, \\ \alpha' &: 2x - \left(1 - i\sqrt{3}\right) x - \left(1 + i\sqrt{3}\right) y = 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Si osservi che in entrambi i casi è $d = 0$*, giacchè la retta assegnata passa per l'origine. Alternativamente, consideriamo la prima delle (4.41):*

$$a + b + c = 0,$$

che è un'equazione lineare omogenea nelle incognite a, b, c*, e come tale ammette* ∞^2 *soluzioni*[3]*. Più speficatamente, assumiamo* a, b *come parametri:*

$$a = \rho, \; b = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Quindi

$$c = -(\rho + \sigma), \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

[3]Ne consegue che esistono ∞^2 piani passanti per r, e in questa doppia infinità dobbiamo selezionare gli unici due piani isotropi.

Ne consegue che il più generale piano passante per r ha equazione:

$$\rho x + \sigma y - (\rho + \sigma) z = 0$$

Per $\rho = 1$

$$x + \sigma y - (1 + \sigma) z = 0 \tag{4.44}$$

Tale piano è isotropo se e solo se

$$\begin{aligned} & 1 + \sigma^2 + (1 + \sigma)^2 = 0 \\ \iff & \sigma^2 + \sigma + 1 = 0 \\ \iff & \sigma_1 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4.44)

$$\begin{aligned} \alpha : x - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) y - \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) z = 0 \\ \alpha' : x - \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) y - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) z = 0 \end{aligned}$$

Cioè le (4.43).

Capitolo 5

Ampliamento complesso del piano euclideo

5.1 Il piano complesso

Le considerazioni svolte nei numeri precedenti si specializzano nel caso del piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Precisamente:

$$\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 \cup \mathcal{I}, \tag{5.1}$$

con $\mathcal{I} = I/\omega$, con $I = \{((\xi, \eta), \mathcal{R})\}$ (cfr. § 1.2).

Proposizione 76 *Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale reale $\mathcal{R}(Oxy)$ di $\mathbb{R}^{2*}$, le rette isotrope sono tutte e sole quelle con coefficiente angolare $+i$ e $-i$.*

Dimostrazione. La più generale retta immaginaria r ha un'equazione che può essere scritta nella forma

$$y = mx + n, \quad m, n \in \mathbb{C}$$

Una coppia ordinata di numeri direttori di r è $(\lambda, \mu) = (1, m)$. Deve essere:

$$r \text{ è isotropa} \Longleftrightarrow \lambda^2 + \mu^2 = 0 \Longleftrightarrow 1 + m^2 = 0,$$

da cui l'asserto. ■

Osserviamo che in virtù della proposizione 67 i fasci impropri del piano Oxy sono l'uno il complesso coniugato dell'altro. Infatti:

$$\mathcal{F}_{iso}^{(1)} : y = ix + n, \ \ \forall n \in \mathbb{C}$$

e

$$\mathcal{F}_{iso}^{(2)} : y = -ix + n^*, \ \ \forall n \in \mathbb{C},$$

onde $\mathcal{F}_{iso}^{(2)} = \left(\mathcal{F}_{iso}^{(1)}\right)^*$.

Esempio 77 *Determiniamo le rette isotrope del piano cartesiano Oxy passanti per $P(3, -1)$.*

Scriviamo

$$r : y = ix + n, \ \ r^* : y = -ix + n^*$$

Imponiamo il passaggio per $P(3, -1)$: $-1 = 3i + n \Longrightarrow n = -1 - 3i$, per cui

$$r : y = ix - (1 + 3i), \ \ r' = r^*$$

Si noti che $P(3, -1)$ è l'unico punto reale di r, r^*: $P \in r \cap r^*$.

Capitolo 6

Esercizi svolti

6.1 Piani e rette immaginari

Esercizio 78 *Scrivere l'equazione dell'unica retta reale passante per il punto immaginario* $P\,(2-3i,-4+i)\in\mathbb{R}^{2*}$.

Svolgimento

Si tratta della retta passante per P e il suo coniugato $P^*\,(2+3i,-4-i)$ e quindi per il punto medio M del segmento $\overline{PP^*}$:

$$M\,(2,-4)$$

Una coppia di numeri direttori di r è $(6i,-2i)$ e quindi $(3,-1)$, da cui una rappresentazione parametrica della retta cercata è

$$x=2+3\rho,\;\; y=-4-\rho$$

Eliminando il parametro ρ

$$r: x+3y+10=0$$

Esercizio 79 *Studiare la retta di* $\mathbb{R}^{2*}$

$$r:(2+i)\,x+iy+2-i=0$$

Svolgimento

La retta è scritta nella forma ordinaria $ax+by+c=0$, onde una coppia di numeri direttori è $(-b,a)$, cioè

$$\lambda=-i,\;\; \mu=2+i,$$

onde r è immaginaria e non è parallela alla propria coniugata r^*. Ne consegue che il suo unico punto reale è l'intersezione con r^*. Per determinare le coordinate di tale punto dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases}(2+i)\,x+iy+2-i=0\\(2-i)\,x-iy+2+i=0\end{cases}$$

Sommando le due equazioni:

$$4x+4=0\Longrightarrow x=-1$$

Sostituendo nella prima:

$$-2-i+iy+2-i=0\Longrightarrow y=2$$

Ne concludiamo che l'unico punto reale della retta immaginaria assegnata è $P\,(-1,2)$.

Esercizio 80 *Studiare la retta di* $\mathbb{R}^{2*}$

$$r : ix + iy - 2 = 0$$

Svolgimento

La retta è scritta nella forma ordinaria $ax + by + c = 0$, onde una coppia di numeri direttori è $(-b, a) = (-i, i) = -i\,(1, -1)$, cioè

$$\lambda = 1,\ \mu = -1,$$

onde r è immaginaria e ha una direzione reale, per cui è priva di punti reali.

Esercizio 81 *Scrivere l'equazione dell'unica retta reale passante per il punto immaginario* $P\,(2 + 3i, 3 - i, 2i)$.

Svolgimento

Si tratta della retta passante per P e il suo coniugato $P^*\,(2 - 3i, 3 + i, -2i)$ e quindi per il punto medio M del segmento $\overline{PP^*}$:

$$M\,(2, 6, 0)$$

Una terna di numeri direttori di r è $(-6i, 2i, -4i)$ e quindi $(3, -1, 2)$. Da ciò segue che una rappresentazione parametrica di r è

$$x = 2 + 3\rho,\ \ y = 6 - \rho,\ \ z = 2\rho$$

Eliminando il parametro ρ si perviene alla rappresentazione ordinaria

$$\begin{cases} 2x - 3z - 4 = 0 \\ 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Alternativamente, dalla conoscenza dei numeri direttori si ottiene la rappresentazione nella forma dei rapporti uguali

$$\frac{x - 2 - 3i}{3} = -y + 3 - i = \frac{z - 2i}{2}$$

Uguagliando prima il secondo e terzo rapporto, e il primo e terzo poi, si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 3z - 4 = 0 \\ 2y + z - 6 = 0 \end{cases},$$

cioè il risultato precedente.

Esercizio 82 *Scrivere l'equazione dell'unica retta reale passante per il punto immaginario* $P\,(2, -2 + i, 3i)$.

Svolgimento

Si tratta della retta passante per P e il suo coniugato $P^*\,(2, -1 - i, -3i)$ e quindi per il punto medio M del segmento $\overline{PP^*}$:

$$M\,(2, -1, 0)$$

Una terna di numeri direttori di r è $(0, -2i, -6i)$ e quindi $(0, 1, 3)$. Da ciò segue che una rappresentazione parametrica di r è

$$x = 2, \;\; y = -1 + \rho, \;\; z = 3\rho$$

Eliminando il parametro ρ si perviene alla rappresentazione ordinaria

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 83 *È reale la retta passante per i punti $P_1(i, 2i, 1)$ e $P_2(1, 2, 1)$?*

Svolgimento
Determiniamo innanzitutto una terna di numeri direttori

$$\lambda = 1 - i, \;\; \mu = 2 - 2i, \;\; \nu = 0$$

Cioè

$$(1 - i, 2(1 - i), 0) = 2(1, 2, 0)$$

Dal momento che i numeri direttori sono definiti a meno di un inessenziale fattore moltiplicativo non nullo, si ha che

$$\lambda = 1, \;\; \mu = 2, \; \nu = 0$$

definisce ancora una terna ordinata di numeri direttori. Ne consegue che la retta assegnata ha una direzione reale, onde o è reale o è immaginaria parallela alla propria coniugata. Proviamo a scrivere le equazioni di r. La forma parametrica è immediata:

$$x = i + \rho, \;\; y = 2i + 2\rho, \;\; z = 1$$

Eliminando il parametro ρ si perviene alla rappresentazione ordinaria:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases},$$

da cui vediamo che r è reale.

Esercizio 84 *Scrivere l'equazione della retta reale passante per un punto immaginario P, nei seguenti casi:*

1. $P(2 - 3i, -4 + i, 1 + 2i)$
2. $P(0, i, 0)$
3. $P(2i, 0, 3 - i)$

Svolgimento

1. Qui è $P^*(2 + 3i, -4 - i, 1 - 2i)$, e il punto medio del segmento $\overline{PP^*}$ è il punto reale $M(2, -4, 1)$. Una terna di numeri direttori è $(\lambda, \mu, \nu) = (6i, -2i, -4i)$, quindi $(3, -1, -2)$ per cui le equazioni nella forma dei rapporti uguali della retta richiesta sono

$$\frac{x - 2}{3} = -y - 4 = \frac{1 - z}{2}$$

2. Qui è $P^*(0,-i,0)$, e il punto medio del segmento $\overline{PP^*}$ è il punto reale $M(0,0,0)$ cioè l'origine del riferimento reale $\mathcal{R}(Oxyz)$. Una terna di numeri direttori è $(\lambda,\mu,\nu) = (0,-2i,0)$, quindi $(0,1,1)$ per cui la retta richiesta è l'asse z.

3. Qui è $P^*(-2i,0,3+i)$, e il punto medio del segmento $\overline{PP^*}$ è il punto reale $M(0,0,3)$. Una terna di numeri direttori è $(\lambda,\mu,\nu) = (-4i,0,2i)$, quindi $(-2,0,1)$ per cui le equazioni nella forma dei rapporti uguali della retta richiesta sono

$$-\frac{x}{2} = \frac{y}{0} = z-3$$

Esercizio 85 *Mostrare che la seguente retta immaginaria*

$$r : \begin{cases} (2+i)\,x + (-1+i)\,y + (1+i)\,z + 2 = 0 \\ (2+2i)\,x + (2-i)\,y + (2+i)\,z - i = 0, \end{cases},$$

ha una direzione reale.

Svolgimento

I numeri direttori di r sono proporzionali ai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1+i & 1+i \\ 2-i & 2-i & 2+i \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Calcoliamo tali minori

$$\begin{vmatrix} -1+i & 1+i \\ 2-i & 2+i \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} 2+i & -1+i \\ 2+2i & 2-i \end{vmatrix} = 9,$$

onde una terna di numeri direttori di r è

$$\lambda = 2,\ \mu = 1,\ \nu = -3$$

Ne concludiamo che r ha una direzione reale.

Esercizio 86 *Studiare la retta*

$$r : \begin{cases} 2ix - y + (1-2i) + 1 = 0 \\ x + 3iy - 2z = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Una terna di numeri direttori di r è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 & 1-2i \\ 1 & 3i & -2 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi

$$\lambda = \begin{vmatrix} -1 & 1-2i \\ 3i & -2 \end{vmatrix} = -4-3i,\ \mu = -\begin{vmatrix} 2i & 1-2i \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1+2i\,,\ \nu = \begin{vmatrix} 2i & -1 \\ 1 & 3i \end{vmatrix} = -5,$$

onde i numeri direttori della coniugata di r sono $\lambda^* = -4+3i,\ \mu^* = 1-2i,\ \nu^* = -5 \Longrightarrow r$ ed r^* non sono parallele. Stabiliamo ora se r è immaginaria di prima o di seconda specie.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2i & -1 & 1-2i & 1 \\ -2i & -1 & 1+2i & 1 \\ 1 & 3i & -2 & 0 \\ 1 & -3i & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Ciò implica che r ed r^* non sono complanari, e non essendo parallele, sono necessariamente sghembe. Ne consegue che r è immaginaria di seconda specie.

Metodo 2

Determiniamo l'eventuale punto di intersezione di r con r^* cercando le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2ix - y + (1-2i) = -1 \\ x + 3iy - 2z = 0 \\ -2ix - y + (1+2i) = -1 \\ x - 3iy - 2z = 0 \end{cases}, \tag{6.1}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2i & -1 & 1-2i \\ 1 & 3i & -2 \\ -2i & -1 & 1+2i \\ 1 & -3i & -2 \end{pmatrix},$$

da cui $rg\,(A) = 3$. La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 2i & -1 & 1-2i & -1 \\ 1 & 3i & -2 & 0 \\ -2i & -1 & 1+2i & -1 \\ 1 & -3i & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Riesce $\det B = 12 \neq 0 \Longrightarrow rg\,(B) = 4 > rg\,(A)$, onde il sistema (6.1) è incompatibile. Ne consegue che r ed r^* sono sghembe o, ciò che è lo stesso, immaginarie di seconda specie.

Esercizio 87 *Assegnata la retta immaginaria*

$$r : \begin{cases} x - 2iz + 3i = 0 \\ y - iz + 2 = 0 \end{cases},$$

stabilire se è di prima o di seconda specie.

Svolgimento

Una terna di numeri direttori di r è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi

$$\lambda = \begin{vmatrix} 0 & -2i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = 2i, \ \mu = \begin{vmatrix} -2i & 1 \\ -i & 0 \end{vmatrix} = i\,, \ \nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

onde i numeri direttori della coniugata di r sono $\lambda^* = -2i$, $\mu^* = -i$, $\nu^* = 1 \Longrightarrow r$ ed r^* non sono parallele. Stabiliamo ora se r è immaginaria di prima o di seconda specie.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2i & 3i \\ 1 & 0 & 2i & -3i \\ 0 & 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & i & 2 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Ciò implica che r ed r^* non sono complanari, e non essendo parallele, sono necessariamente sghembe. Ne consegue che r è immaginaria di seconda specie.

Metodo 2

Determiniamo l'eventuale punto di intersezione di r con r^* cercando le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+0-2iz=-3i \\ 0+y-iz=-2 \\ x+0+2iz=3i \\ 0+y+iz=-2 \end{cases}, \tag{6.2}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i & -3i \\ 0 & 1 & -i & -2 \\ 1 & 0 & 2i & 3i \\ 0 & 1 & i & -2 \end{pmatrix}$$

Riesce $\det B = 12 \neq 0 \Longrightarrow rg\,(B) = 4 > rg\,(A)$, onde il sistema (6.2) è incompatibile. Ne consegue che r ed r^* sono sghembe o, ciò che è lo stesso, immaginarie di seconda specie.

Esercizio 88 *Assegnati i punti immaginari* $P_1\,(2-i, 3+2i, 2)\,,\ P_2\,(3-2i, 4i, 3)$, *stabilire se la retta per essi è reale o immaginaria.*

Svolgimento

Una terna di numeri direttori della retta r per i punti dati è

$$\lambda = 1-i,\ \ \mu = -3+2i,\ \ \nu = 1,$$

per cui

$$\lambda, \mu \notin \mathbb{R} \Longrightarrow r \text{ è immaginaria}$$

Alternativamente possiamo applicare il criterio 25. A tale scopo scriviamo l'equazione di r nella forma dei rapporti uguali:

$$\frac{x-2+i}{1-i} = \frac{y-3-2i}{-3+2i} = z-2 \tag{6.3}$$

La retta r è reale se e solo se passa per P_1 e $P_1^*\,(2+i, 3-2i, 2)$. Il passaggio per P_1 è espresso dalla (6.3). Verifichiamo il passaggio per P_1^*:

$$\frac{2+i-2+i}{1-i} = \frac{3-2i-3-2i}{-3+2i} = 2-2$$

Cioè

$$\frac{2i}{1-i} = \frac{4i}{3-2i} = 0 \qquad \text{mai!}$$

onde $P_1^* \notin r \Longrightarrow r$ è immaginaria. Per determinare la specie di r, dobbiamo stabilire se essa è complanare o meno alla sua coniugata r^*.

Metodo 1
È chiaro che $P_1^*, P_2^* \in r^*$, per cui

$$r, r^* \text{ complanari} \iff P_1, P_2, P_1^*, P_2^* \text{ sono complanari}$$

La (3.12) implica che dobbiamo calcolare il determinante del quarto ordine:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 3+2i & 2 & 1 \\ 3-2i & 4i & 3 & 1 \\ 2+1 & 3-2i & 2 & 1 \\ 3+2i & -4i & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sottraendo alla terza riga la prima, e alla quarta riga la seconda, otteniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-i & 3+2i & 2 & 1 \\ 3-2i & 4i & 3 & 1 \\ -2i & 4i & 0 & 0 \\ 4i & -8i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

giacchè la quarta riga è proporzionale alla terza. Ne concludiamo che P_1, P_2, P_1^*, P_2^* sono complanari o, ciò che è lo stesso r è immaginaria di prima specie.

Metodo 2

Studiamo l'intersezione di r con r^*. Più precisamente, se r ed r^* si intersecano[1] si ha che r è immaginaria di prima specie. Viceversa, è di seconda specie giacchè r ed r^* non sono parallele nè propriamente nè impropriamente. A tale scopo scriviamo l'equazione di r, r^* nella forma ordinaria. Dalla (6.3) uguagliando rispettivamente il primo rapporto al terzo e il secondo al terzo, si ha:

$$r : \begin{cases} x - (1-i)\, z - i = 0 \\ y + (3-2i)\, z - 9 + 2i = 0 \end{cases},$$

e quindi

$$r^* : \begin{cases} x - (1+i)\, z + i = 0 \\ y + (3+2i)\, z - 9 - 2i = 0 \end{cases}$$

Per quanto precede, si tratta di studiare il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 0 - (1-i)\, z = i \\ 0 + y + (3-2i)\, z = 9 - 2i \\ x + 0 - (1+i)\, z = -i \\ 0 + y + (3+2i)\, z = 9 + 2i \end{cases} \tag{6.4}$$

Si tratta di un sistema di $m = 4$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1-i) \\ 0 & 1 & 3-2i \\ 1 & 0 & -(1+i) \\ 0 & 1 & 3+2i \end{pmatrix}$$

[1] In un punto reale (corollario 37)

Calcoliamo il minore di ordine 3

$$A_{123,123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(1-i) \\ 0 & 1 & 3-2i \\ 1 & 0 & -(1+i) \end{vmatrix} = -(1+i)+1-i$$
$$= -2i \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1-i) & i \\ 0 & 1 & 3-2i & 9-2i \\ 1 & 0 & -(1+i) & -i \\ 0 & 1 & 3+2i & 9+2i \end{pmatrix},$$

il cui determinante è

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(1-i) & i \\ 0 & 1 & 3-2i & 9-2i \\ 1 & 0 & -(1+i) & -i \\ 0 & 1 & 3+2i & 9+2i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(1-i) & i \\ 0 & 1 & 3-2i & 9-2i \\ 0 & 0 & -2i & -2i \\ 0 & 1 & 3+2i & 9+2i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3-2i & 9-2i \\ 0 & -2i & -2i \\ 1 & 3+2i & 9+2i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3-2i & 9-2i \\ 0 & -2i & -2i \\ 0 & 4i & 4i \end{vmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

cosicchè $rg(B) = 3 = rg(A) \Longrightarrow$ il sistema è compatibile. Il rango del sistema è $p = rg(A) = 3 = n \Longrightarrow$ il sistema è determinato. Anzichè applicare la regola di Cramer, è preferibile sottrarre membro a membro la prima e terza equazione, ottenendo

$$-(-i)z + (1+i)z = 2i$$

Cioè $z = 1$, da cui si ottengono facilmente le rimanenti incognite $y = 6$ e $x = 1$. Quindi $P(1,6,1) \in r \cap r^* \Longrightarrow r$ è di prima specie. Completiamo l'esercizio determinando l'equazione dell'unico piano reale α passante per r (corollario 38). A tale scopo scriviamo l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di piani di asse r:

$$x - (1-i)z - i + k[y + (3-2i)z - 9 + 2i] = 0 \tag{6.5}$$

Il piano che stiamo cercando appartiene ad $\mathcal{F}$ e passa per $P_1^* \in r^*$, onde:

$$P_1^*(2+i, 3-2i, 2) \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow 2+i-2(1-i)-i+k[3-2i+2(3-2i)-9+2i] = 0,$$

da cui ricaviamo $k = \frac{1}{2}$. Sostituendo tale valore del parametro k nella (6.5) otteniamo l'equazione del piano α

$$\alpha : 2x + y + z - 9 = 0$$

Esercizio 89 *Assegnata la retta immaginaria*

$$r : \begin{cases} x - iz + 2 = 0 \\ y - 2iz + 3 = 0 \end{cases},$$

verificare che è di prima specie. Determinare poi l'equazione dell'unico piano reale passante per r.

Svolgimento

Determiniamo innanzitutto una terna di numeri direttori di r. A tale scopo riscriviamo le equazioni di r

$$r : \begin{cases} x + 0 - iz + 2 = 0 \\ 0 + y - 2iz + 3 = 0 \end{cases}$$

Una terna di numeri direttori è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2i \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ 1 & -2i \end{vmatrix} = i, \quad \mu = -\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 0 & -2i \end{vmatrix} = 2i, \quad \nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

per cui

$$\lambda, \mu \notin \mathbb{R} \Longrightarrow r \text{ è immaginaria}$$

Inoltre r ed r^* non sono parallele, quindi o sono sghembe o sono complanari.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i & 2 \\ 1 & 0 & i & 2 \\ 0 & 1 & -2i & 3 \\ 0 & 1 & 2i & 3 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

giacchè la quarta riga è proporzionale alla seconda. Ne consegue che r ed r^* sono complanari $\Longrightarrow r$ è immaginaria di prima specie.

Metodo 2

Studiamo l'intersezione $r \cap r^*$ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + 0 - iz = -2 \\ 0 + y - 2iz = -3 \\ x + 0 - iz = -2 \\ 0 + y + 2iz = -3 \end{cases} \tag{6.6}$$

Si tratta di un sistema di $m = 4$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2i \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2i \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il minore di ordine 3

$$\begin{aligned} A_{123,123} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2i \\ 1 & 0 & i \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2i \\ 0 & 0 & 2i \end{vmatrix} \\ &= 2i \neq 0 \Longrightarrow rg\,(A) = 3 \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & -2 \\ 0 & 1 & -2i & -3 \\ 1 & 0 & i & -2 \\ 0 & 1 & 2i & -3 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i & -2 \\ 0 & 1 & -2i & -3 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow rg\,(B) = 3$$

Cioè $rg\,(A) = rg\,(B) \Longrightarrow$ il sistema è compatibile. Il suo rango è $p = rg\,(A) = 3$, onde $p = n \Longrightarrow$ il sistema è determinato. Anzichè applicare il metodo dei determinanti, è preferibile sottrarre membro a membro la prima e terza equazione, ottenendo:

$$-iz - iz = 0 \Longrightarrow z = 0$$

A questo punto si ricavano facilmente le rimanenti incognite $x = -2,\ y = -3$. Ne consegue che il punto di intersezione di r con la sua coniugata r^* è $P\,(-2, -3, 0) \in r \cap r^*$. Per determinare l'equazione dell'unico piano reale passante per r, scriviamo l'equazione del fascio di piani di asse r

$$x - iz + 2 + k\,(y - 2iz + 3) = 0,$$

cioè

$$x + ky - i\,(2k+1)\,z + (2+3k) = 0$$

Deve essere $2k+1=0 \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}$, da cui

$$\alpha : 2x - y + 1 = 0$$

***

Il testo del seguente esercizio è tratto da [4].

Esercizio 90 *Dopo aver verificato che la seguente retta*

$$r : \begin{cases} x + (1-i)\,y + 2iz - 1 = 0 \\ 2x - iy + (2i-1)\,z - 1 = 0 \end{cases},$$

è immaginaria di prima specie, determinare l'equazione dell'unico piano reale passante per r.

Svolgimento

Una terna di numeri direttori è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ 2 & -i & 2i-1 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ -i & 2i-1 \end{vmatrix} = -1+3i, \quad \mu = -\begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 2i-1 & 2 \end{vmatrix} = 1+2i, \quad \nu = \begin{vmatrix} 1 & 1-i \\ 2 & -i \end{vmatrix} = -2+i,$$

per cui

$$\lambda, \mu, \nu \notin \mathbb{R} \Longrightarrow r \text{ è immaginaria}$$

Inoltre r ed r^* non sono parallele, quindi o sono sghembe o sono complanari.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1-i & 2i & -1 \\ 1 & 1+i & -2i & -1 \\ 2 & -i & -1+2i & -1 \\ 2 & i & -1-2i & -1 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ne consegue che r ed r^* sono complanari $\Longrightarrow r$ è immaginaria di prima specie.

Metodo 2

Studiamo l'intersezione $r \cap r^*$ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + (1-i)\,y + 2iz = 1 \\ 2x - iy + (2i-1)\,z = 1 \\ x + (1+i)\,y - 2iz = 1 \\ 2x + iy + (2i+1)\,z = 1 \end{cases} \tag{6.7}$$

Si tratta di un sistema di $m = 4$ equazioni in $n = 3$ incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ 2 & -i & 2i-1 \\ 1 & 1+i & -2i \\ 2 & i & -2i-1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il minore di ordine 3

$$A_{123,123} = \begin{vmatrix} 1 & 1-i & 2i \\ 2 & -i & 2i-1 \\ 1 & 1+i & -2i \end{vmatrix} = 10i \neq 0 \Longrightarrow rg\,(A) = 3$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2i & 1 \\ 2 & -i & 2i-1 & 1 \\ 1 & 1+i & -2i & 1 \\ 2 & i & -2i-1 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $\det B = 0 \Longrightarrow rg\,(B) = 3$. Cioè $rg\,(A) = rg\,(B) \Longrightarrow$ il sistema è compatibile. Il suo rango è $p = rg\,(A) = 3$, onde $p = n \Longrightarrow$ il sistema è determinato. Un sistema equivalente è

$$\begin{cases} x + (1-i)\,y + 2iz = 1 \\ 2x - iy + (2i-1)\,z = 1 \\ x + (1+i)\,y - 2iz = 1 \end{cases}$$

Applicando la regola di Cramer si trova $x = \frac{3}{5},\ y = \frac{2}{5},\ z = \frac{1}{5}$, cosicchè $P_0\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \in r \cap r^*$. Per determinare l'equazione dell'unico piano reale passante per r, scriviamo l'equazione del fascio di piani di asse r:

$$\mathcal{F} : x + (1-i)\,y + 2iz - 1 + k\,[2x - iy + (2i-1)\,z - 1] = 0$$

Cioè

$$(1+2k)\,x + (1-i-ik)\,y + (2ki - k + 2i)\,z - k - 1 = 0 \tag{6.8}$$

Denotando con α l'unico piano reale contenente r, segue che α appartiene al fascio (6.8) e passa per un qualunque punto di r^* distinto da P_0. Per determinare le coordinate di tale punto è conveniente passare dalla rappresentazione ordinaria di r^*

$$\begin{cases} x + (1+i)\,y - 2iz - 1 = 0 \\ 2x + iy + (-2i-1)\,z - 1 = 0 \end{cases},$$

ad una sua rappresentazione parametrica. A tale scopo assumiamo z come parametro, onde dalle equazioni precedenti si ha

$$\begin{cases} x + (1+i)\,y = 1 + 2i\rho \\ 2x + iy = 1 + (2i+1)\,\rho \end{cases},$$

che è un sistema lineare nelle incognite x, y. Risolvendo si ottiene:

$$x = \left(\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right)[1 + (1+3i)\,\rho]\,,\ y = \left(\frac{2}{5} - \frac{i}{5}\right) + i\rho,\ z = \rho,$$

che compone una rappresentazione parametrica di r^*. Per $\rho_0 = 0$ otteniamo $Q_0\left(\frac{2}{5} - \frac{i}{5}, \frac{2}{5} - \frac{i}{5}, 0\right) \in r^*$. A questo punto andiamo a sostituire le coordinate di Q_0 nell'equazione (6.8). Dopo alcuni passaggi:

$$-\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right)k = 0 \Longleftrightarrow k = -1$$

Immettendo tale valore di k nella (6.8) otteniamo l'equazione di α

$$x - y - z = 0$$

Esercizio 91 *Studiare la retta di* $\mathbb{R}^{2*}$

$$r : (2+i)\,x - 2iy - 2 = 0$$

Svolgimento

La retta è data nella forma ordinaria $ax + by + c = 0$, per cui una coppia di numeri direttori è $(-b, a)$, cioè

$$\lambda = 2i,\ \mu = 2 + i,$$

onde una coppia di numeri direttori della coniugata r^* è

$$\lambda^* = -2i,\ \mu^* = 2 - i,$$

da cui vediamo che r ed r^* non sono parallele, quindi si intersecano in un punto reale. Per determinare le coordinate cartesiane di tale punto dobbiamo risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} (2+i)\,x - 2iy = 2 \\ (2-i)\,x + 2iy = 2 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$(2+i)\,x + (2-i)\,x = 4 \Longrightarrow x = 1,$$

che sostituita in una delle equazioni fornisce $y = \frac{1}{2}$. Ne concludiamo che $P\left(1, \frac{1}{2}\right) \in r \cap r^*$.

Esercizio 92 *Studiare la retta di* $\mathbb{R}^{2*}$

$$r : (1+2i)\,x + (2+4i)\,y - 1 = 0$$

Svolgimento
Una coppia di numeri direttori di r è

$$\lambda = 2 - 4i,\ \mu = 1 - 2i$$

D'altra parte

$$(\lambda, \mu) = (2 - 4i, 1 - 2i) = (2(1 - 2i), 1 - 2i) = (1 - 2i)(2, 1),$$

onde $(2, 1)$ è un'altra coppia di numeri direttori. Dalla realtà di questi ultimi segue che la retta immaginaria assegnata ha una direzione reale. Scriviamo ora l'equazione nella forma

$$r : y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2(1 + 2i)} \tag{6.9}$$

La coniugata di r è

$$r^* : y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2(1 - 2i)}, \tag{6.10}$$

da cui si ha che r ed r^* sono propriamente parallele, in accordo con la seconda delle (3.34). Infine, dalle (6.9)-(6.10) vediamo che r ha coefficiente angolare reale e passa per il punto immaginario $\frac{1}{2(1+2i)}$.

Esercizio 93 *Scrivere l'equazione dell'unica retta reale passante per il punto immaginario* $P(1 + 2i, 2 - i)$.

Svolgimento
La retta richiesta passa per P e $P^*(1 - 2i, 2 + i)$ e quindi per il punto medio M del segmento $\overline{PP^*}$, cioè $M(1, 2)$. Una coppia di numeri direttori è

$$\lambda = 1 - 2i - (1 + 2i) = -4i,\ \mu = 2 + i - (2 - i) = 2i$$

Ma

$$(-4i, 2i) = 2i(-2, 1),$$

onde anche $(2, 1)$ è una coppia ordinata di numeri direttori. Ne consegue che una rappresentazione parametrica della retta che stiamo cercando è

$$x = 1 - 2\rho,\ y = 2 + \rho$$

Eliminando il parametro ρ si perviene alla rappresentazione ordinaria

$$x + 2y - 5 = 0$$

Esercizio 94 *Scrivere l'equazione dell'unica retta reale passante per il punto immaginario* $P(3 - 2i, -1 + 4i, -2 - i)$.

Svolgimento
$P(3 - 2i, -1 + 4i, -2 - i) \Longrightarrow P^*(3 + 2i, -1 - 4i, -2 + i)$, mentre il punto medio del segmento $\overline{PP^*}$ è $M(3, -1, -2)$. Una terna ordinata di numeri direttori è $(4i, , -8i, 2i)$, quindi $(2, -4, 1)$ è ancora una terna di numeri direttori. Segue che una rappresentazione parametrica della retta cercata è

$$x = 3 + 2\rho,\ y = -1 - 4\rho,\ z = -2 + \rho$$

Eliminando il parametro ρ otteniamo la rappresentazione ordinaria

$$r : \begin{cases} x - 2z - 7 = 0 \\ y + 4z + 9 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 95 *Scrivere l'equazione dell'unico retta reale per un punto immaginario P nei seguenti casi:*

1. $P(2+i, 1-4i, -3+2i)$
2. $P(i, 0, 0)$
3. $P(1-3i, 0, -2)$

Svolgimento

1. $P(2+i, 1-4i, -3+2i) \Longrightarrow P^*(2-i, 1+4i, -3-2i)$, mentre il punto medio del segmento $\overline{PP^*}$ è $M(2, 1, -3)$. Una terna ordinata di numeri direttori è $(-2i, , 8i, -4i)$, quindi $(1, -4, 2)$ è ancora una terna di numeri direttori. Segue che una rappresentazione parametrica della retta cercata è

$$x = 2+\rho,\ y = 1-4\rho,\ z = 3+2\rho$$

Eliminando il parametro ρ otteniamo la rappresentazione ordinaria

$$r : \begin{cases} 4x + y - 9 = 0 \\ 2x - z - 7 = 0 \end{cases}$$

2. $P(i, 0, 0) \Longrightarrow P^*(-i, 0, 0)$. Una terna ordinata di numeri direttori è $(-2i, 0, 0)$, quindi $(1, 0, 0)$ è ancora una terna di numeri direttori. Segue che la retta cercata è l'asse x.

3. $P(1+3i, 1, 0, -2) \Longrightarrow P^*(1-3i, 1, 0, -2)$. Una terna ordinata di numeri direttori è $(6i, 0, 0)$, quindi $(1, 0, 0)$ è ancora una terna di numeri direttori. Segue che la retta cercata è l'asse x.

Esercizio 96 *Studiare la retta*

$$r : \begin{cases} (1+i)\,x + (2+i)\,y + (-1+i)\,z + 2 = 0 \\ (2+i)\,x + (2+2i)\,y + (2-i)\,z - i = 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

Svolgimento

Determiniamo innanzitutto una terna di numeri direttori di r. A tale scopo determiniamo i minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2+i & -1+i \\ 2+i & 2+2i & 2-i \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni:

$$\begin{vmatrix} 2+i & -1+i \\ 2+2i & 2-i \end{vmatrix} = 9, \begin{vmatrix} -1+i & 1+i \\ 2-i & 2+i \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2+i & 2+2i \end{vmatrix} = -3 \tag{6.12}$$

Cioè $(9, -6, -3) = -3\,(-3, 2, 1)$, onde una terna di numeri direttori ha per elementi:

$$\lambda = -3,\ \mu = 2,\ \nu = 1$$

Ne consegue che la retta assegnata o è reale o è immaginaria con una direzione reale (più precisamente, è parallela alla propria coniugata). Per stabilire la natura di r applichiamo il

criterio 25. A tale scopo determiniamo le coordinate cartesiane di un punto di r. Ad esempio se poniamo $z = 0$ nelle (6.11) otteniamo il sistema lineare di due equazione nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} (1+i)\,x + (2+i)\,y = -2 \\ (2+i)\,x + (2+2i)\,y = i \end{cases},$$

il cui determinante fondamentale è il terzo della (6.12), cioè -3. Quindi

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & 2+i \\ i & 2+2i \end{vmatrix}}{3} = 1+2i,\ \ y = -\frac{\begin{vmatrix} 1+i & -2 \\ 2+i & i \end{vmatrix}}{3} = -1-i,$$

onde $P_0\,(1+2i, -1-i, 0) \in r$. Il coniugato di P_0 è $P_0^*\,(1-2i, -1+i, 0)$; vediamo se appartiene a r:

$$(1+i)\,(1-2i) + (2+i)\,(-1+i) = -2 \Longleftrightarrow 0 = -2$$

L'assurdità di tale risultato implica $P_0^* \notin r \Longrightarrow r$ è immaginaria.

Esercizio 97 *Studiare la retta:*

$$r : \begin{cases} x - (1+i)\,y + (1-i)\,z - 1 = 0 \\ (1-i)\,x + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Per determinare una terna ordinata di numeri direttori, riscriviamo per comodità le equazioni di r nella forma

$$r : \begin{cases} x - (1+i)\,y + (1-i)\,z = 1 \\ (1-i)\,x + 0 + 2z = 4 \end{cases}$$

Dobbiamo determinare i minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -(1+i) & 1-i \\ 1-i & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi:

$$\begin{vmatrix} -(1+i) & 1-i \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\,(1+i)$$

$$\begin{vmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1-i \end{vmatrix} = (1-i)^2 - 2 = 1 - 2i + i^2 - 2 = -2\,(1+i)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -(1+i) \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} = (1-i)\,(1+i) = 2$$

Abbiamo così ottenuto la terna

$$(-2\,(1+i)\,, -2\,(1+i)\,, 2) = -2\,(1+i, 1+i, 1)\,,$$

per cui possiamo assumere $\lambda = 1+i$, $\mu = 1+i$, $\nu = 1 \Longrightarrow r$ è immaginaria. Stabiliamo ora se la retta è immaginaria di prima o di seconda specie.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -(1+i) & 1-i & -1 \\ 1 & -(1-i) & 1+i & -1 \\ 1-i & 0 & 2 & -4 \\ 1+i & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ne consegue che r ed r^*sono sghembe $\Longrightarrow r$ è immaginaria di seconda specie.

Metodo 2

Scriviamo l'equazione della coniugata

$$r^* : \begin{cases} x-(1-i)\,y+(1+i)\,z-1=0 \\ (1+i)\,x+2z-4=0 \end{cases},$$

per poi comporre il sistema lineare

$$\begin{cases} x-(1+i)\,y+(1-i)\,z=1 \\ (1-i)\,x+0+2z=4 \\ x-(1-i)\,y+(1+i)\,z=1 \\ (1+i)\,x+0+2z=4 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -(1+i) & 1-i \\ 1-i & 0 & 2 \\ 1 & -(1-i) & 1+i \\ 1+i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il minore del terzo ordine estratto da A cancellando la prima riga è

$$\begin{aligned} A_{234,123} &= \begin{vmatrix} 1-i & 0 & 2 \\ 1 & -(1-i) & 1+i \\ 1+i & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(1-i)\begin{vmatrix} 1-i & 2 \\ 1+i & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(1-i)\,(2-2i-2-2i) \\ &\neq 0 \Longrightarrow rg\,(A)=3 \end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -(1+i) & 1-i & 1 \\ 1-i & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -(1-i) & 1+i & 1 \\ 1+i & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di B

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 1 & -(1+i) & 1-i & 1 \\ 1-i & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -(1-i) & 1+i & 1 \\ 1+i & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -(1+i) & 1-i & 1 \\ -3-5i & 0 & -2+4i & 0 \\ 0 & 2i & 2i & 0 \\ -3-3i & 4(1+i) & -2+4i & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2i \begin{vmatrix} 3+5i & 4(1+i) & -2+4i \\ 0 & 1 & 1 \\ 3+3i & 4(1+i) & -2+4i \end{vmatrix} \\
&= 2i \begin{vmatrix} 3+5i & 6 & -2+4i \\ 0 & 0 & 1 \\ 3+3i & 6 & -2+4i \end{vmatrix} \\
&= 12i \begin{vmatrix} 3+5i & 1 & -2+4i \\ 0 & 0 & 1 \\ 3+3i & 1 & -2+4i \end{vmatrix} \\
&= -12i \begin{vmatrix} 3+5i & 1 \\ 3+3i & 1 \end{vmatrix} \\
&= -12i\,(3+5i-3-3i) \\
&= -12i\,(2i) \\
&= -24i^2 = 24,
\end{aligned}$$

onde $rg\,(B) = 4 \neq rg\,(A) \Longrightarrow$ il sistema è incompatibile, e dal momento che r ed r^* non sono parallele, ne concludiamo che tali rette sono sghembe o, ciò che è lo stesso, r è immaginaria di seconda specie.

Esercizio 98 *Determinare l'intersezione di α con α^* nei casi seguenti:*

1. $\alpha : (2+i)\,x + (1-4i)\,y + (-3+2i)\,z + 1 = 0$
2. $\alpha : (1-3i)\,x - 2iz - 2 = 0$
3. $\alpha : (1+2i)\,y - z + 2 = 0$

Svolgimento

1. Qui è $\alpha^* : (2-i)\,x + (1+4i)\,y + (-3-2i)\,z + 1 = 0 \Longrightarrow \alpha$ e α^* non sono paralleli, per cui se $r = \alpha \cap \alpha^*$ si ha

$$r : \begin{cases} (2+i)\,x + (1-4i)\,y + (-3+2i)\,z + 1 = 0 \\ (2-i)\,x + (1+4i)\,y + (-3-2i)\,z + 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$4x + 2y - 6z = 0 \Longleftrightarrow 2x + y - 3z + 1 = 0$$

Sottraendo membro a membro

$$2ix - 8iy + 4iz = 0 \Longleftrightarrow x - 4y + 2z = 0,$$

per cui un'altra rappresentazione ordinaria di r è

$$r : \begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

2. Qui è $\alpha^* : (1 + 3i)\, x + 2iz - 2 = 0 \Longrightarrow \alpha$ e α^* non sono paralleli, per cui se $r = \alpha \cap \alpha^*$ si ha

$$r : \begin{cases} (1 - 3i)\, x - 2iz - 2 = 0 \\ (1 + 3i)\, x + 2iz - 2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$2x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0$$

Sottraendo membro a membro

$$-6ix - 4iz = 0 \Longleftrightarrow 3x + 2z = 0,$$

per cui un'altra rappresentazione ordinaria di r è

$$r : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

3. Qui è $\alpha^* : (1 + 2i)\, y - z + 2 = 0 \Longrightarrow \alpha$ e α^* non sono paralleli, per cui se $r = \alpha \cap \alpha^*$ si ha

$$r : \begin{cases} (1 + 2i)\, y - z + 2 = 0 \\ (1 - 2i)\, y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$-2y - 2z + 4 = 0 \Longleftrightarrow y - z + 2 = 0$$

Sottraendo membro a membro

$$4iy = 0 \Longleftrightarrow y = 0,$$

per cui un'altra rappresentazione ordinaria di r è

$$r : \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 99 *Verificare che è reale la giacitura del piano immaginario*

$$\alpha : (1 + 2i)\, x + (-1 - 2i)\, y + (2 + 4i)\, z - 1 = 0$$

Il piano α interseca il suo coniugato α^*?

Svolgimento

Per un assegnato piano (reale o immaginario) di equazione $ax+by+cz+d=0$, la giaciutura è determinata dalla terna ordinata (ka, kb, kc) essendo k un coefficiente di proporzionalità non nullo e scelto da arbitrio. Nel caso in esame risulta:

$$(a, b, c) = (1+2i, -(1+2i), 2(1+2i)) = (1+2i)(1, -1, 2)$$

Quindi anche la terna ordinata $(1, -1, 2)$ definisce la giacitura del piano assegnato. Dal momento che $(1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ si ha che tale giacitura è reale. Per rispondere all'ultimo quesito scriviamo l'equazione del piano coniugato:

$$\alpha^* : (1-2i)x + (-1+2i)y + (2-4i)z - 1 = 0,$$

la cui giacitura è

$$\begin{aligned}(1-2i, -1+2i, 2-4i) &= (1-2i, -(1-2i), 2(1-2i)) \\ &= (1-2i)(1, -1, 2),\end{aligned}$$

cioè $(1, -1, 2)$. Ne consegue che a e α^* sono propriamente paralleli in accordo con la proprietà 43.

Esercizio 100 *È reale la retta*

$$r : \begin{cases} x+2i = 2(z+i) \\ y-3i = 3(z-i) \end{cases} ?$$

Svolgimento

Abbiamo

$$\begin{cases} x+2i = 2z+2i \\ y-3i = 3z-3i \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2z = 0 \\ y-3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r \text{ è reale}$$

Esercizio 101 *Studiare $r = \alpha \cap \beta$, essendo*

$$\begin{aligned}\alpha &: (1-2i)x + (1-i)y + (2-3i)z - i = 0 \\ \beta &: (2-i)x + (1-i)y + (3-2i)z + 1 = 0\end{aligned}$$

Svolgimento

Si tratta di studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} (1-2i)x + (1-i)y + (2-3i)z - i = 0 \\ (2-i)x + (1-i)y + (3-2i)z + 1 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo e sommando membro a membro otteniamo:

$$\begin{cases} x+z+1 = 0 \\ 3x+2y+5z+1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r \text{ è reale}$$

Esercizio 102 *Scrivere l'equazione della retta reale $r \subset \alpha$, essendo α il piano immaginario di equazione*

$$(3-2i)x + (-1+4i)y - 2iz + 1 = 0 \tag{6.13}$$

Svolgimento

Per la proprietà 43 è $r = \alpha \cap \alpha^*$. Inoltre, dalla (6.13) vediamo che α ed α^* non sono paralleli. Quindi impostiamo il sistema lineare

$$\begin{cases} (3-2i)\,x + (-1+4i)\,y - 2iz + 1 = 0 \\ (3+2i)\,x + (-1-4i)\,y + 2iz + 1 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$6x - 2y + 2 = 0 \Longleftrightarrow 3x - y + 1 = 0$$

Sottraendo membnro a membro

$$-4ix + 8iy - 4iz = 0 \Longleftrightarrow x - 2y + z = 0,$$

onde una rappresentazione ordinaria della retta cercata è

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 103 *Dopo aver verificato che la seguente retta*

$$r : \begin{cases} (1+i)\,x + (-1+i)\,y + z - 2 = 0 \\ 2x + (1+i)\,z - 2 = 0 \end{cases}$$

è immaginaria di prima specie, scrivere l'equazione dell'unico piano reale contenente r.

Svolgimento

Determiniamo innanzitutto una terna di numeri direttori di r. A tale scopo riscriviamo le equazioni di r

$$r : \begin{cases} (1+i)\,x + (-1+i)\,y + z = 2 \\ 2x + 0 + (1+i)\,z = -2 \end{cases}$$

Una terna di numeri direttori è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1+i & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi:

$$\begin{vmatrix} -1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{vmatrix} = 2-2i, \quad \begin{vmatrix} 1+i & -1+i \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(2-2i)$$

Cioè

$$(-2, 2-2i, -(2-2i)) = -2\,(1, -1-i, 1-i)$$

Poichè i numeri direttori sono definiti a meno di una inessenziale costante moltiplicativa non nulla, si ha

$$\lambda = 1, \ \mu = -1-i, \ \nu = 1-i$$

La retta r è manifestamente immaginaria, giacchè $\mu, \nu \notin \mathbb{R}$. Inoltre, i numeri direttori della coniugata r^* sono $\lambda^* = 1$, $\mu^* = -1+i$, $\nu = 1+i$, cioè r ed r^* non sono parallele. Ne consegue che le suddette rette o sono sghembe o sono complanari.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & -1+i & 1 & -2 \\ 1-i & -1-i & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1+i & -2 \\ 2 & 0 & 1-i & -2 \end{vmatrix},$$

e

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & d'_2 \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ne consegue che r ed r^* sono complanari $\Longrightarrow r$ è immaginaria di prima specie.

Metodo 2

Dobbiamo studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} (1+i)\,x + (-1+i)\,y + z = 2 \\ 2x + 0 + (1+i)\,z = 2 \\ (1-i)\,x + (-1-i)\,y + z = 2 \\ 2x + 0 + (1-i)\,z = 2 \end{cases} \tag{6.14}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i & 1 \\ 2 & 0 & 1+i \\ 1-i & -1-i & 1 \\ 2 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il minore del terzo ordine

$$\begin{aligned} A_{234,123} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1+i \\ 1-i & -1-i & 1 \\ 2 & 0 & 1-i \end{vmatrix} \\ &= -2\,(1+i) \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1-i \end{vmatrix} \\ &= -4+4i \end{aligned}$$

Risulta dunque $A_{234,123} \neq 0 \Longrightarrow p = rg\,(A) = 3$, cioè abbiamo un sistema lineare di caratteristica 3. La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1+i & 2 \\ 1-i & -1-i & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

La quarta colonna è una combinazione lineare delle prime tre, onde $\det B = 0 \Longrightarrow rg\,(B) = 3 = rg\,(A)$. Ne consegue che il sistema è compatibile, risultando determinato poichè $p = n$, dove $n = 3$ è il numero di incognite. Un sistema equivalente è

$$\begin{cases} 2x + 0 + (1+i)\,z = 2 \\ (1-i)\,x + (-1-i)\,y + z = 2 \\ 2x + 0 + (1-i)\,z = 2 \end{cases}$$

Sommando membro a membro la prima e terza equazione si ottiene $z = 0$, e dalle rimanenti $x = 1,\ y = -1$, per cui $P\,(1,-1,0) \in r \cap r^*$. Ne concludiamo che r è immaginaria di prima specie. Per rispondere al secondo quesito, scriviamo l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di piani di asse r:

$$(1+i)\,x + (-1+i)\,y + z - 2 + k\,[2x + (1+i)\,z - 2] = 0, \tag{6.15}$$

essendo k un parametro arbitrario. Il piano reale α contenente r, necessariamente contiene r^*. Per determinare il valore di k che determina α, imponiamo il passaggio di α per un punto della retta coniugata r^*. A tale scopo è conveniente passare dalla rappresentazione ordinaria di r^*

$$\begin{cases} (1-i)\,x + (-1-i)\,y + z = 2 \\ 2x + 0 + (1-i)\,z = 2, \end{cases}$$

a una rappresentazione parametrica. Assumiamo dunque $z = \rho$ (parametro arbitrario), onde il sistema precedente si scrive

$$\begin{cases} (1-i)\,x + (-1-i)\,y = 2 - \rho \\ 2x + 0 = 2 - (1-i)\,\rho, \end{cases}$$

da cui

$$x = 1 - \frac{1-i}{2}\rho,\ \ y = -1 + \rho,\ \ z = \rho, \quad \rho \in \mathbb{C},$$

che compone una rappresentazione parametrica di r^*. Per $\rho_1 = 1$ otteniamo il punto immaginario

$$P_1\left(\frac{1+i}{2}, 0, 1\right) \in r^*$$

Ora non dobbiamo fare altro che sostituire le coordinate cartesiane di P_1 nell'equazione del fascio (6.15) in modo da ottenere l'equazione lineare nell'incognita k:

$$i - 1 + 2ik = 0,$$

che risolta fornisce il valore di k che stiamo cercando e cioè $k = -\frac{1}{2}\,(1+i)$. A questo punto sostituiamo tale valore nella (6.15) ottenendo dopo alcuni passaggi

$$(-1+i)\,(y - z + 1) = 0,$$

cioè l'equazione del piano α

$$y - z + 1 = 0$$

Esercizio 104 *Dopo aver verificato che la seguente retta*

$$r : \begin{cases} (1+i)\,x + 2y - (1-i)\,z - 1 = 0 \\ 2ix + (1+i)\,y - 1 = 0 \end{cases}$$

è immaginaria di prima specie, scrivere l'equazione dell'unico piano reale contenente r.

Svolgimento

Determiniamo innanzitutto una terna di numeri direttori di r. A tale scopo riscriviamo le equazioni di r

$$r : \begin{cases} (1+i)\,x + 2y - (1-i)\,z = 1 \\ 2ix + (1+i)\,y + 0 = 1 \end{cases}$$

Una terna di numeri direttori è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 & -(1-i) \\ 2i & 1+i & 0 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi:

$$\begin{vmatrix} 2 & -(1-i) \\ 1+i & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 1-i & 1+i \\ 0 & 2i \end{vmatrix} = 2+2i, \quad \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ 2i & 1+i \end{vmatrix} = -2i$$

Cioè

$$\lambda = 2,\ \mu = 2+2i,\ \nu = -2i$$

La retta r è manifestamente immaginaria, giacchè $\mu, \nu \notin \mathbb{R}$. Inoltre, i numeri direttori della coniugata r^* sono $\lambda^* = 2,\ \mu^* = 2-2i,\ \nu = -2i$, cioè r ed r^* non sono parallele. Ne consegue che le suddette rette o sono sghembe o sono complanari.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 2 & -(1-i) & -1 \\ 1-i & 2 & -(1+i) & -1 \\ 2i & 1+i & 0 & -1 \\ -2i & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

mentre il determinante ridotto è

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ne consegue che r ed r^* sono complanari $\Longrightarrow r$ è immaginaria di prima specie.

Metodo 2

Dobbiamo studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} (1+i)\,x + 2y - (1-i)\,z = 1 \\ 2ix + (1+i)\,y + 0 = 1 \\ (1-i)\,x + 2y - (1+i)\,z = 1 \\ -2ix + (1-i)\,y + 0 = 1 \end{cases} \tag{6.16}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -(1-i) \\ 2i & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & -(1+i) \\ -2i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il minore del terzo ordine

$$\begin{aligned} A_{234,123} &= \begin{vmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & -(1+i) \\ -2i & 1-i & 0 \end{vmatrix} \\ &= -4+4i \end{aligned}$$

Risulta dunque $A_{234,123} \neq 0 \implies p = rg\,(A) = 3$, cioè abbiamo un sistema lineare di caratteristica 3. La matrice dei coefficienti e dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -(1-i) & 1 \\ 2i & 1+i & 0 & 1 \\ 1-i & 2 & -(1+i) & 1 \\ -2i & 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riesce $\det B = 0 \implies rg\,(B) = 3 = rg\,(A)$. Ne consegue che il sistema è compatibile e determinato poichè $p = n$, dove $n = 3$ è il numero di incognite. Un sistema equivalente è

$$\begin{cases} 2ix + (1+i)\,y + 0 = 1 \\ (1-i)\,x + 2y - (1+i)\,z = 1 \\ -2ix + (1-i)\,y + 0 = 1 \end{cases} \tag{6.17}$$

Sommando membro a membro la prima e terza equazione si ottiene

$$\begin{cases} (1-i)\,x + 2y - (1+i)\,z = 1 \\ 0 + 2y + 0 = 2 \end{cases},$$

onde $y = 1$, che sostituita nella terza di (6.17) porge $x = -\frac{1}{2}$. Dalla seconda di (6.17):

$$(1-i) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - (1+i)\,z = 1,$$

cioè $z = \frac{1}{2}$. Segue che $P\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \in r \cap r^*$. Ne concludiamo che r è immaginaria di prima specie. Per rispondere al secondo quesito, scriviamo l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di piani di asse r:

$$(1+i)\,x + 2y - (1-i)\,z - 1 + k\,[2ix + (1+i)\,y - 1] = 0, \tag{6.18}$$

essendo k un parametro arbitrario. Il piano reale α contenente r, necessariamente contiene r^*. Per determinare il valore di k che determina α, imponiamo il passaggio di α per un punto della retta coniugata r^*. A tale scopo è conveniente passare dalla rappresentazione ordinaria di r

$$\begin{cases} (1+i)\,x + 2y - (1-i)\,z - 1 = 0 \\ 2ix + (1+i)\,y - 1 = 0 \end{cases}$$

a una rappresentazione parametrica. Assumiamo dunque $z = \rho$ (parametro arbitrario), onde il sistema precedente si scrive

$$\begin{cases} (1+i)\,x + 2y = 1 + (1-i)\,\rho \\ 2ix + (1+i)\,y = 1, \end{cases}$$

da cui

$$x = -\frac{1}{2}(1+i) + i\rho, \;\; y = \frac{1}{2}(1+i) + (1-i)\,\rho, \;\; z = \rho, \quad \rho \in \mathbb{C},$$

che compone una rappresentazione parametrica di r. Per $\rho_0 = 0$ otteniamo il punto immaginario

$$P_0\left(-\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2}, 0\right) \in r \Longrightarrow P_0^*\left(-\frac{1-i}{2}, \frac{1-i}{2}, 0\right) \in r^*$$

Ora non dobbiamo fare altro che sostituire le coordinate cartesiane di P_0^* nell'equazione del fascio (6.18) che per comodità riscriviamo nella forma:

$$[1 + i\,(1+2k)]\,x + [2 + k\,(1+i)]\,y - (1-i)\,z - (k+1) = 0 \tag{6.19}$$

Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} &[1 + i\,(1+2k)]\left(-\frac{1-i}{2}\right) + [2 + k\,(1+i)]\,\frac{1-i}{2} - (k+1) = 0 \\ \Longleftrightarrow\; &-\frac{i}{2} - \frac{i\,(1-i)}{2}(1+2k) + 1 - i + \frac{k}{2}(1+i)(1-i) - k - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ordinando i vari termini:

$$k\,(1+i) = -\,(1+i) \Longleftrightarrow k = -1$$

Il valore $k = -1$ seleziona tra gli infiniti piani del fascio (6.19) il piano reale α contenente r. E ponendo in tale equazione $k = -1$ otteniamo l'equazione di α:

$$x + y - z = 0$$

Esercizio 105 *Studiare la retta:*

$$r : \begin{cases} (1+i)\,x + (1+2i)\,y + (1-i)\,z + 2i = 0 \\ (1+2i)\,x + 2\,(1+i)\,y - (1-2i)\,z - 1 = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Determiniamo una terna di numeri direttori di r. La matrice che ci interessa è:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1+2i & 1-i \\ 1+2i & 2\,(1+i) & -\,(1-2i) \end{pmatrix}$$

Estraendo i minori del secondo ordine cancellando prima, seconda e terza colonna e con segni alterni, si trova:

$$\begin{vmatrix} 1+2i & 1-i \\ 2\,(1+i) & -\,(1-2i) \end{vmatrix} = -9, \quad \begin{vmatrix} 1-i & 1+i \\ -\,(1-2i) & 1+2i \end{vmatrix} = 6, \quad \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 1+2i & 2\,(1+i) \end{vmatrix} = 3,$$

onde $(-9,6,3) = 3(-3,2,1)$. Poichè i numeri direttori sono definiti a meno di un essenziale fattore moltiplicativo non nullo, si ha:

$$\lambda = -3,\ \mu = 2,\ \nu = 1$$

Cioè r ha una direzione reale, per cui è parallela alla propria coniugata. Ne consegue che r è priva di punti reali. Determiniamo ora l'equazione dell'unico piano reale α contenente r. A tale scopo scriviamo l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di piani di asse r:

$$\mathcal{F} : [1+i+k(1+2i)]\,x + [1+2i+2k(1+i)]\,y + [1-i-k(1-2i)]\,z + 2i - k = 0 \quad (6.20)$$

Per determinare il valore di k che determina α, imponiamo il passaggio di α per un punto della retta coniugata r^*. A tale scopo è conveniente passare dalla rappresentazione ordinaria di r^*

$$\begin{cases} (1-i)\,x + (1-2i)\,y + (1+i)\,z - 2i = 0 \\ (1-2i)\,x + 2(1-i)\,y - (1+2i)\,z - 1 = 0 \end{cases}$$

a una rappresentazione parametrica. Assumiamo dunque $z = \rho$ (parametro arbitrario), onde il sistema precedente si scrive

$$\begin{cases} (1-i)\,x + (1-2i)\,y = 2i - (1+i)\,\rho \\ 2ix + (1+i)\,y = 1 + (1+2i)\,\rho, \end{cases}$$

da cui

$$x = 1+2i-3\rho,\ \ y = -1-i+2(1-i)\,\rho,\ \ z = \rho, \quad \rho \in \mathbb{C},$$

che compone una rappresentazione parametrica di r. Per $\rho_0 = 0$ otteniamo il punto immaginario

$$P_0\,(1+2i, -1-i, 0) \in r^*$$

Ora non dobbiamo fare altro che sostituire le coordinate cartesiane di P_0 nell'equazione del fascio (6.20):

$$\begin{aligned} &[1+i+k(1+2i)](1+2i) - [1+2i+2k(1+i)](1+i) + 2i - k = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &(1+i+k+2ik)(1+2i) - (1+2i+2k+2ik)(1+i) + 2i - k = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &[1+k+i(1+2k)](1+2i) - [1+2k+2i(1+k)](1+i) + 2i - k = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &1+k+2i+2ik+i+2ik-2-4k-1-2k-i-2ik-2i-2ik \\ &+2+2k+2i-k = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &-4k+2i = 0 \Longleftrightarrow k = -\frac{i}{2}, \end{aligned}$$

che sostituito in (6.20) fornisce l'equazione di α:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

Esercizio 106 *Studiare la retta*

$$r : \begin{cases} x + iy = 0 \\ z + i = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Determiniamo innanzitutto una terna di numeri direttori di r. A tale scopo riscriviamo le equazioni di r

$$r : \begin{cases} x + iy + 0 = 0 \\ 0 + 0 + z = -i \end{cases}$$

Una terna di numeri direttori è data dai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna, e presi con segni alterni. Quindi:

$$\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = i, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Cioè

$$\lambda = i, \ \mu = -1, \ \nu = 0$$

La retta r è manifestamente immaginaria, giacchè $\lambda \notin \mathbb{R}$. Inoltre, i numeri direttori della coniugata r^* sono $\lambda^* = -i, \ \mu^* = -1, \ \nu = 0$, cioè r ed r^* non sono parallele. Ne consegue che le suddette rette o sono sghembe o sono complanari.

Metodo 1

Applichiamo l'algoritmo (40). Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^* & b^* & c^* & d^* \\ a' & b' & c' & d' \\ a'^* & b'^* & c'^* & d'^* \end{vmatrix}$$

Cioè

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{vmatrix},$$

mentre il determinante ridotto è

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\Delta_1 \neq 0 \Longrightarrow r$ e r^* non sono complanari $\Longrightarrow r$ è immaginaria di seconda specie.

Metodo 2

Studiamo l'intersezione di r con r^*, ricercando l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + iy + 0 = 0 \\ 0 + 0 + z = -i \\ x - iy + 0 = 0 \\ 0 + 0 + z = i \end{cases},$$

che è manifestamente incompatibile in virtù della seconda e quarta equazione. Ne concludiamo che r ed r^* sono sghembe.

6.2 Vettori isotropi

Esercizio 107 *Dopo aver stabilito l'isotropia dei seguenti vettori, decomporli in parte reale e parte immaginaria, verificando la proposizione (46):*

$$\mathbf{a} = \left(-i, i, \sqrt{2}\right), \ \ \mathbf{b} = \left(-i, \sqrt{5}, 2i\right)$$
$$\mathbf{c} = (2+i, 1+2i, 2-2i), \ \ \mathbf{d} = (8-i, 1-8i, 4+4i)$$

Svolgimento

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 &= (-i)^2 + i^2 + 2 \\ &= i^2 + i^2 + 2 \\ &= -1 - 1 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \ \ |\mathbf{a}| = 0$$

Decomponiamo $\mathbf{a}$ in parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(0, 0, \sqrt{2}\right) + (-i, i, 0) \\ &= \left(0, 0, \sqrt{2}\right) + i\,(-1, 1, 0), \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{a}' = \left(0, 0, \sqrt{2}\right), \ \ \mathbf{a}'' = (-1, 1, 0)$$

Riesce

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}'|^2 = 2, \ \ |\mathbf{a}''| &= 1 + 1 = 2 \\ \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Passiamo al vettore $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}|^2 &= (-i)^2 + 5 - 4 \\ &= -1 + 5 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \ \ |\mathbf{b}| = 0$$

Decomponiamo $\mathbf{b}$ in parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \left(0, \sqrt{5}, 0\right) + (-i, 0, 2i) \\ &= \left(0, \sqrt{5}, 0\right) + i\,(-1, 0, 2), \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{b}' = \left(0, \sqrt{5}, 0\right), \ \ \mathbf{b}'' = (-1, 0, 2)$$

Riesce

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}'|^2 &= 5, \;\; |\mathbf{b}''| = 1+4 = 5 \\ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'' &= 0+0+0 = 0 \end{aligned}$$

Passiamo al vettore $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (2+i)^2 + (1+2i)^2 + (2-2i)^2 \\ &= 4+4i-1+1+4i-4+4-8i-4 = 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{c} \neq \mathbf{0}, \;\; |\mathbf{c}| = 0$$

Decomponiamo $\mathbf{c}$ in parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (2,1,2) + (i, 2i, -2i) \\ &= (2,1,2) + i\,(1,2,-2)\,, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{c}' = (2,1,2)\,, \;\; \mathbf{c}'' = (1,2,-2)$$

Riesce

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}'|^2 &= 4+1+4 = 9, \;\; |\mathbf{c}''| = 1+4+4 = 9 \\ \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' &= 2+2-4 = 0 \end{aligned}$$

Passiamo al vettore $\mathbf{d}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (8-i)^2 + (1-8i)^2 + (4+4i)^2 \\ &= 64-16i-1+1-16i-64+16+32i-16 = 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{c} \neq \mathbf{0}, \;\; |\mathbf{c}| = 0$$

Decomponiamo $\mathbf{d}$ in parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= (8,1,4) + (-i, -8i, 4i) \\ &= (8,1,4) + i\,(-1,-8,4)\,, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{d}' = (8,1,4)\,, \;\; \mathbf{d}'' = (-1,-8,4)$$

Riesce

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}'|^2 &= 64+1+16 = 81, \;\; |\mathbf{d}''| = 1+64+16 = 81 \\ \mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}'' &= -8+8+16 = 0 \end{aligned}$$

6.3 Rette isotrope

Esercizio 108 *(Testo tratto da [5]). Dopo aver verificato l'isotropia dei seguenti vettori:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1-2i, 2+2i, 2-i)\\
\mathbf{v}_2 &= (4-4i, 8+i, 1+8i)\\
\mathbf{v}_3 &= \left(\sqrt{2}, -i, i\right)\\
\mathbf{v}_4 &= \left(-2i, i, \sqrt{5}\right),
\end{aligned}$$

rappresentare parametricamente le rette isotrope $r_k // \mathbf{v}_k$ con $k = 1, 2, 3, 4$ passanti per $P\,(2, -1, 1)$. Decomporre poi i singoli vettori in parte reale e parte immaginaria, mostrando che si tratta di vettori reali ortogonali e con ugual modulo.

Svolgimento
Vettore $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 &= (1-2i)^2 + (2+2i)^2 + (2-i)^2\\
&= 1 - 4i - 4 + 4 + 8i - 4 + 4 - 4i - 1\\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde l'isotropia di $\mathbf{v}_1$. Scriviamo:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2) + i\,(-2, 2, -1)\,,$$

da cui

$$\mathbf{v}_1' = \operatorname{Re}\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)\,, \quad \mathbf{v}_1'' = \operatorname{Im}\mathbf{v}_1 = (-2, 2, -1)$$

Riesce:

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_1'' = -2 + 4 - 2 = 0, \quad |\mathbf{v}_1'| = \sqrt{1+4+4} = 3, \quad |\mathbf{v}_1''| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

Vettore $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 &= (4-4i)^2 + (8+i)^2 + (1+8i)^2\\
&= 26 - 32i - 16 + 64 + 16i - 1 + 1 + 16i - 64\\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde l'isotropia di $\mathbf{v}_2$. Scriviamo:

$$\mathbf{v}_2 = (4, 8, 1) + i\,(-4, 1, 8)\,,$$

da cui

$$\mathbf{v}_2' = \operatorname{Re}\mathbf{v}_2 = (4, 8, 1)\,, \quad \mathbf{v}_2'' = \operatorname{Im}\mathbf{v}_2 = (-4, 1, 8)$$

Riesce:

$$\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{v}_2'' = -1 + 8 + 8 = 0, \quad |\mathbf{v}_2'| = \sqrt{16+64+1} = 9, \quad |\mathbf{v}_2''| = \sqrt{16+64+1} = 9$$

Vettore $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 2 - 1 - 1 = 0$$

onde l'isotropia di $\mathbf{v}_3$. Scriviamo:

$$\mathbf{v}_3 = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right) + i\,(0, -1, 1)\,,$$

da cui

$$\mathbf{v}_3' = \operatorname{Re}\mathbf{v}_3 = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right), \quad \mathbf{v}_3'' = \operatorname{Im}\mathbf{v}_3 = (0, -1, 1)$$

Riesce:

$$\mathbf{v}_3' \cdot \mathbf{v}_3'' = 0, \quad |\mathbf{v}_3'| = \sqrt{2}, \quad |\mathbf{v}_3''| = \sqrt{2}$$

Vettore $\mathbf{v}_4$:

$$\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{v}_4 = -4 - 1 + 5 = 0$$

onde l'isotropia di $\mathbf{v}_4$. Scriviamo:

$$\mathbf{v}_4 = \left(0, 0, \sqrt{5}\right) + i\,(-2, 1, 0)\,,$$

da cui

$$\mathbf{v}_4' = \operatorname{Re}\mathbf{v}_4 = \left(0, 0, \sqrt{5}\right), \quad \mathbf{v}_4'' = \operatorname{Im}\mathbf{v}_4 = (-2, 1, 0)$$

Riesce:

$$\mathbf{v}_4' \cdot \mathbf{v}_4'' = 0, \quad |\mathbf{v}_4'| = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{v}_4''| = \sqrt{4}$$

I numeri direttori delle rette $r_k // \mathbf{v}_k$ sono le componenti dei vettori $\mathbf{v}_k$. Inoltre tali rette devono passare per $P\,(2, -1, 1)$, quindi:

$$\begin{aligned}
&r_1 : x = 2 + \rho\,(1 - 2i)\,, \;\; y = -1 + \rho\,(2 + 2i)\,, \;\; z = 1 + \rho\,(2 - i)\,, \quad \forall \rho \in \mathbb{C}\\
&r_2 : x = 2 + \rho\,(4 - 4i)\,, \;\; y = -1 + \rho\,(8 + i)\,, \;\; z = 1 + \rho\,(1 + 8i)\,, \quad \forall \rho \in \mathbb{C}\\
&r_3 : x = 2 + \rho\sqrt{2}, \;\; y = -1 - i\rho, \;\; z = 1 + i\rho, \quad \forall \rho \in \mathbb{C}\\
&r_4 : x = 2 - 2i\rho, \;\; y = -1 + i\rho, \;\; z = 1 + i\sqrt{5}\rho, \quad \forall \rho \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

6.4 Piani isotropi

Esercizio 109 *Scrivere l'equazione dell'unico piano isotropo contenente la retta isotropa:*

$$r : \frac{x-1}{i} = \frac{y-2}{-i} = \frac{z+1}{\sqrt{2}} \tag{6.21}$$

Svolgimento

È il Problema 69 che per quanto visto, è risolto dalla formula (4.25), che in questo caso si scrive:

$$\lambda\,(x - 1) + \mu\,(y - 2) + \nu\,(z + 1) = 0$$

Dalla (6.21) segue $\lambda = i$, $\mu = -i$, $\nu = \sqrt{2}$, onde:

$$i\,(x - 1) - i\,(y - 2) + \sqrt{2}\,(z + 1) = 0$$

Ordinando i vari termini, otteniamo l'equazione dell'unico piano isotropo contenente la retta isotropa assegnata:

$$ix - iy + \sqrt{2}z + \sqrt{2} + i = 0$$

Esercizio 110 *Assegnato il piano isotropo*

$$\alpha : ix + y - 1 = 0, \tag{6.22}$$

determinare:

1. *l'equazione dell'unico fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di rette isotrope contenute in α.*
2. *Mostrare che le rette del fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ sono rette isotrope dei piani paralleli al piano coordinato xy.*

Svolgimento
La (4.26) si scrive

$$ia' + b' = 0 \tag{6.23}$$

Assumiamo come parametri indipendenti le incognite b' e c', per cui la (6.23) ammette le ∞^2 soluzioni:

$$a' = i\rho,\ b' = \rho,\ c' = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo la soluzione particolare determinata da $\rho_1 = 1,\ \sigma_1 = 1$:

$$a'_1 = i,\ b'_1 = 1,\ c'_1 = 1,$$

per cui la (4.28) si scrive:

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} ix + y + z + k = 0 \\ ix + y - 1 = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{6.24}$$

Per rispondere al quesito 2 determiniamo i numeri direttori di una qualunque retta di $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$. A tale scopo scriviamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -i & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Ricaviamo $\lambda = -1,\ \mu = i,\ \nu = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$, da cui l'isotropia di ogni retta di (6.24). Inoltre, $\nu = 0$ implica che le rette di $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ sono rette isotrope di piani paralleli al piano coordinato xy. Infatti dalle (6.24):

$$\begin{cases} y = -ix + 1 \\ z = -k - 1 \end{cases} \tag{6.25}$$

Per la proposizione 76 la prima delle (6.25) è l'equazione di una retta isotropa del piano coordinato xy, mentre dalla seconda vediamo che tale retta è individuata da $k = -1$ ($\Longrightarrow z = 0$). Ne consegue che una qualunque retta isotropa del piano isotropo α (cfr. eq. (6.22)) è data dall'intersezione di α con un piano parallelo al piano coordinato xy. In simboli, denotando con Ψ_{xy} il fascio improprio di piani paralleli al piano xy, si ha:

$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha),\ \exists \beta \in \Psi_{xy} \mid r = \alpha \cap \beta$$

Esercizio 111 *Invertire il procedimento utilizzato per la risoluzione dell'esercizio precedente, cioè assegnata la retta isotropa:*

$$r : \begin{cases} ix + y + z - 1 = 0 \\ ix + y - 1 = 0 \end{cases},$$

determinare l'equazione dell'unico piano isotropo passante per r.

Svolgimento
Dobbiamo applicare la formula (4.25) che qui scriviamo nella forma:

$$\lambda (x - x_0) + \mu (y - y_0) + \nu (z - z_0) = 0,$$

dove λ, μ, ν sono i numeri direttori di r, mentre $(x_0, y_0, z_0) \in r$. Il calcolo dei numeri direttori è immediato: $\lambda = 1,\ \mu = -i,\ \nu = 0$. Per quanto visto nell'esercizio precedente è $(-i, 0, 0) \in r$, onde l'equazione richiesta è

$$x + i - iy = 0 \Longleftrightarrow -i (ix - 1 + y) = 0 \Longleftrightarrow ix + y - 1 = 0,$$

cioè la (6.22).

Esercizio 112 *Assegnato il piano isotropo*

$$\alpha : ix + z - 1 = 0, \tag{6.26}$$

determinare:

1. *l'equazione dell'unico fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di rette isotrope contenuto in α;*
2. *Mostrare che le rette del fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ sono rette isotrope dei piani paralleli al piano coordinato xz.*

Svolgimento
La (4.26) si scrive

$$ia' + c' = 0 \tag{6.27}$$

Assumiamo come parametri indipendenti le incognite b' e c', per cui la (6.23) ammette le ∞^2 soluzioni:

$$a' = i\sigma,\ b' = \rho,\ c' = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo la soluzione particolare determinata da $\rho_1 = 1,\ \sigma_1 = 1$:

$$a'_1 = i,\ b'_1 = 1,\ c'_1 = 1,$$

per cui la (4.28) si scrive:

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} ix + y + z + k = 0 \\ ix + z - 1 = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{6.28}$$

Per rispondere al quesito 2 determiniamo i numeri direttori di una qualunque retta di $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$. A tale scopo scriviamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Ricaviamo $\lambda = 1,\ \mu = 0,\ \nu = -i \Longrightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$, da cui l'isotropia di ogni retta di (6.24). Inoltre, $\mu = 0$ implica che le rette di $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ sono rette isotrope di piani paralleli al piano coordinato xz. Infatti dalle (6.24):

$$\begin{cases} z = -ix + 1 \\ y = -k - 1 \end{cases} \tag{6.29}$$

Per la proposizione 76 la prima delle (6.29) è l'equazione di una retta isotropa del piano coordinato xz, mentre dalla seconda vediamo che tale retta è individuata da $k = -1$ ($\Longrightarrow$ $y = 0$). Ne consegue che una qualunque retta isotropa del piano isotropo α (cfr. eq. (6.26)) è data dall'intersezione di α con un piano parallelo al piano coordinato xz. In simboli, denotando con Ψ_{xz} il fascio improprio di piani paralleli al piano xz, si ha:

$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha)\,,\ \exists \beta \in \Psi_{xz} \mid r = \alpha \cap \beta$$

Esercizio 113 *Invertire il procedimento utilizzato per la risoluzione dell'esercizio precedente, cioè assegnata la retta isotropa:*

$$r : \begin{cases} ix + y + z - 1 = 0 \\ ix + z - 1 = 0 \end{cases},$$

determinare l'equazione dell'unico piano isotropo passante per r.

Svolgimento
Dobbiamo applicare la formula (4.25) che qui scriviamo nella forma:

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \nu(z - z_0) = 0,$$

dove λ, μ, ν sono i numeri direttori di r, mentre $(x_0, y_0, z_0) \in r$. I numeri direttori sono già noti: $\lambda = i,\ \mu = 0,\ \nu = -i$. Per quanto visto nell'esercizio precedente è $(-i, 0, 0) \in r$, onde l'equazione richiesta è

$$x + i - iz = 0 \Longleftrightarrow -i(ix - 1 + z) = 0 \Longleftrightarrow ix + z - 1 = 0,$$

cioè la (**??**).

Esercizio 114 *Assegnato il piano isotropo*

$$\alpha : iy + z - 1 = 0, \tag{6.30}$$

determinare:

1. *l'equazione dell'unico fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di rette isotrope contenuto in α;*
2. *Mostrare che le rette del fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ sono rette isotrope dei piani paralleli al piano coordinato yz.*

Svolgimento
La (4.26) si scrive

$$ib' + c' = 0 \tag{6.31}$$

Assumiamo come parametri indipendenti le incognite a' e c', per cui la (6.23) ammette le ∞^2 soluzioni:

$$a' = \rho,\ b' = i\sigma,\ c' = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo la soluzione particolare determinata da $\rho_1 = 1,\ \sigma_1 = 1$:

$$a'_1 = \rho,\ b'_1 = i,\ c'_1 = 1,$$

per cui la (4.28) si scrive:

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} x + iy + z + k = 0 \\ iy + z - 1 = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{6.32}$$

Per rispondere al quesito 2 determiniamo i numeri direttori di una qualunque retta di $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$. A tale scopo scriviamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix},$$

Ricaviamo $\lambda = 0,\ \mu = 1,\ \nu = i \Longrightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$, da cui l'isotropia di ogni retta di (6.24). Inoltre, $\mu = 0$ implica che le rette di $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ sono rette isotrope di piani paralleli al piano coordinato xz. Infatti dalle (6.24):

$$\begin{cases} z = -iy + 1 \\ x = -k - 1 \end{cases} \tag{6.33}$$

Per la proposizione 76 la prima delle (6.33) è l'equazione di una retta isotropa del piano coordinato yz, mentre dalla seconda vediamo che tale retta è individuata da $k = -1$ ($\Longrightarrow x = 0$). Ne consegue che una qualunque retta isotropa del piano isotropo α (cfr. eq. (6.30)) è data dall'intersezione di α con un piano parallelo al piano coordinato yz. In simboli, denotando con Ψ_{yz} il fascio improprio di piani paralleli al piano yz, si ha:

$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}(\alpha),\ \exists \beta \in \Psi_{yz} \mid r = \alpha \cap \beta$$

Esercizio 115 *(Il testo del quesito 2 è tratto da [5])Assegnato il piano isotropo*

$$\alpha : 5x + 3iy - 4iz - 60i = 0, \tag{6.34}$$

determinare:

1. *l'equazione dell'unico fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di rette isotrope contenute in α.*
2. *Le rette isotrope di α passanti per i punti di intersezione di α con gli assi coordinati.*

Svolgimento
La (4.26) si scrive

$$5a' + 3ib' - 4ic' = 0 \tag{6.35}$$

Assumiamo come parametri indipendenti le incognite b' e c', per cui la (6.23) ammette le ∞^2 soluzioni:

$$a' = \frac{1}{5}(4i\sigma - 3i\rho),\ b' = \rho,\ c' = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo la soluzione particolare determinata da $\rho_1 = 1,\ \sigma_1 = 1$:

$$a'_1 = \frac{i}{5},\ b'_1 = 1,\ c'_1 = 1,$$

per cui la (4.28) si scrive:

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} ix + 5y + 5z + 5k = 0 \\ 5x + 3iy - 4iz - 60i = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{6.36}$$

Per rispondere al quesito 2, denotiamo con A, B, C i punti di intersezione di α con gli assi coordinati. Quindi:

$$A\left(x_0, 0, 0\right), \ B\left(0, y_0', 0\right), \ C\left(0, 0, z_0''\right)$$

Dalla (6.34)

$$A\left(12i, 0, 0\right), \ B\left(0, 20, 0\right), \ C\left(0, 0, -25\right)$$

Denotiamo con r_0, r_0', r_0'' le rette di $\mathcal{F}_{iso}\left(\alpha\right)$ passanti per A, B, C rispettivamente. Cioè:

$$\begin{array}{c} r_0 \in \mathcal{F}_{iso}\left(\alpha\right) \mid A \in r_0 \\ r_0' \in \mathcal{F}_{iso}\left(\alpha\right) \mid B \in r_0 \\ r_0'' \in \mathcal{F}_{iso}\left(\alpha\right) \mid C \in r_0 \end{array}$$

Dalla prima delle (6.36):

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in r_0 \Longrightarrow -12 + 5k_0 = 0 \Longrightarrow k_0 = -\frac{12}{5} \\ B \in r_0' \Longrightarrow 100 + 5k_0' = 0 \Longrightarrow k_0' = -20 \\ C \in r_0'' \Longrightarrow -5\left(-25\right) + 5k_0'' = 0 \Longrightarrow k_0'' = -25 \end{array} \right. ,$$

onde

$$r_0 : \left\{ \begin{array}{l} ix + 5y + 5z - 12 = 0 \\ 5x + 3iy - 4iz - 60i = 0 \end{array} \right. ; \ r_0' : \left\{ \begin{array}{l} ix + 5y + 5z - 100 = 0 \\ 5x + 3iy - 4iz - 60i = 0 \end{array} \right. ; \ r_0'' : \left\{ \begin{array}{l} ix + 5y + 5z - 125 = 0 \\ 5x + 3iy - 4iz - 60i = 0 \end{array} \right.$$

Alternativamente, applicando la (4.24):

$$r_0 : \frac{x - 12i}{5} = \frac{y}{3i} = \frac{z}{-4i}; \ r_0' : \frac{x}{5} = \frac{y - 20}{3i} = \frac{z}{-4i}; \ r_0 : \frac{x}{5} = \frac{y}{3i} = \frac{z + 25}{-4i}$$

Esercizio 116 *(Testo tratto da [5]). Determinare l'equazione della retta reale del piano isotropo dell'esercizio precedente.*

Svolgimento.
Se s è la retta reale del piano isotropo (6.34), si ha $s \in \alpha \cap \alpha^*$, onde:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3iy - 4iz - 60i = 0 \\ 5x - 3iy + 4iz + 60i = 0 \end{array} \right.$$

Per metterla in forma reale, i.e. $s = \beta \cap \beta'$ tali che β, β' reali, sommiamo membro a membro le equazioni di s:

$$25x = 0$$

Sottraendo:

$$6iy - 8iz - 60i = 0$$

Quindi

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 3y - 4z - 60 = 0 \end{array} \right. ,$$

la prima è manifestamente l'equazione del piano coordinato yz.

Esercizio 117 *Assegnato il piano reale*

$$\alpha : x + y = 0, \tag{6.37}$$

determinare:

1. *i fasci impropri* $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$, $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$ *delle rette isotrope di* α*;*

2. *le rette isotrope di* α *passanti per* $P_0(1,-1,2)$.

Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che essendo α reale, per la proposizione 67 si ha $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha) = \left(\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)\right)^*$.

Metodo 1

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto della (6.37):

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo λ dalla prima

$$\lambda = -\mu,$$

e sostituendo nella seconda:

$$2\mu^2 + \nu^2 = 0$$

Assumendo l'incognita come parametro, i.e. $\mu = \rho,\ \forall \rho \in \mathbb{C}$

$$\lambda = -\rho,\ \mu = \rho,\ \nu = \pm i\rho\sqrt{2},\quad \forall \rho \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Si noti che abbiamo scartato il valore $\rho = 0$, in quanto riproduce la terna nulla che è priva di significato geometrico. Per $\rho = 1$, otteniamo le terne non proporzionali:

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \left(-1, i\sqrt{2}, 1\right),\ \ (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = \left(-1, -i\sqrt{2}, 1\right),$$

cioè i numeri direttori delle rette appartenenti rispettivamente a $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$ ed a $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$. Come preannunciato, riesce

$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha),\ r^* \in \mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$$

Metodo 2

La più generale retta contenuta nel piano α ha una rappresentazione ordinaria:

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{6.38}$$

Determiniamo i suoi numeri direttori:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

onde

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b' & c' \end{vmatrix} = c',\ \mu = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c' & a' \end{vmatrix} = -c',\ \nu = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a' & b' \end{vmatrix} = b' - a'$$

Imponiamo l'isotropia

$$c'^2 + c'^2 + (a' - b')^2 = 0$$

Cioè

$$a'^2 - 2\rho a' + \left(\rho^2 + 2\sigma^2\right) = 0, \tag{6.39}$$

avendo assunto le incognite b' e c' come parametri, ponendo $b' = \rho,\ c' = \sigma,\ \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$. Le radici della (6.39) sono

$$a'_{1,2} = \rho \pm i\sigma\sqrt{2}$$

Per $\rho = \sigma = 1$

$$\begin{aligned} (a'_1, b'_1, c'_1) &= \left(1 - i\sqrt{2}, 1, 1\right) \\ (a'_2, b'_2, c'_2) &= \left(1 + i\sqrt{2}, 1, 1\right) \end{aligned} \tag{6.40}$$

Quindi

$$r \in \mathcal{F}^{(1)}_{iso}(\alpha) \Longrightarrow r : \begin{cases} x + y = 0 \\ \left(1 + i\sqrt{2}\right) x + y + z + d' = 0 \end{cases}$$

Per un assegnato valore del coefficiente $d' \in \mathbb{C}$. Dalle (6.40) vediamo che la seconda terna di soluzioni è la complessa coniugata della prima:

$$(a'_2, b'_2, c'_2) = (a'^*_1, b'^*_1, c'^*_1),$$

come appunto deve essere. Riesce dunque:

$$r^* \in \mathcal{F}^{(2)}_{iso}(\alpha) \Longrightarrow r^* : \begin{cases} x + y = 0 \\ \left(1 - i\sqrt{2}\right) x + y + z + d' = 0 \end{cases}$$

Assumendo il coefficiente d' come parametro libero, otteniamo le equazioni dei fasci impropri:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)}_{iso}(\alpha) &: \begin{cases} x + y = 0 \\ \left(1 + i\sqrt{2}\right) x + y + z + k = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \\ \mathcal{F}^{(2)}_{iso}(\alpha) &: \begin{cases} x + y = 0 \\ \left(1 - i\sqrt{2}\right) x + y + z + k = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{6.41}$$

Passiamo ora al quesito 2. Sostituendo le coordinate di P_0 nella seconda delle equazioni del fascio improprio $\mathcal{F}^{(1)}_{iso}(\alpha)$ (cfr. eq. 6.41):

$$\left(1 - i\sqrt{2}\right) - 1 + 2 + k = 0 \Longrightarrow k = -2 + i\sqrt{2},$$

onde l'equazione di r_0 passante per P_0 è:

$$r_0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ \left(1 + i\sqrt{2}\right) x + y + z + -2 + i\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Mentre l'altra retta r'_0 è, per quanto precede, la complessa coniugata r^*_0:

$$r^*_0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ \left(1 - i\sqrt{2}\right) x + y + z + -2 - i\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

D'altra parte ciò è consistente, giacchè P_0 è un punto reale, per cui è $P_0 \in r \cap r^*$. Alternativamente, osservando che una terna ordinata di numeri direttori di una retta appartenente a uno dei due fasci è $\left(-1, i\sqrt{2}, 1\right)$, si ha che una rappresentazione parametrica della retta r_0 per P_0 è:

$$x = 1 - t,\ y = -1 + i\sqrt{2}t,\ z = 2 + t, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

L'altra invece, è la complessa coniugata:

$$x = 1 - t,\ y = -1 - i\sqrt{2}t,\ z = 2 + t, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

Esercizio 118 *Assegnato il piano reale*

$$\alpha : y - 2z = 0, \tag{6.42}$$

determinare:

1. *i fasci impropri* $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$, $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$ *delle rette isotrope di* α*;*
2. *le rette isotrope di* α *passanti per* $P_0(3,2,1)$.

Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che essendo α reale, per la proposizione 67 si ha $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha) = \left(\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)\right)^*$.

Metodo 1

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto della (6.42):

$$\begin{cases} \mu - 2\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo λ dalla prima

$$\mu = 2\nu,$$

e sostituendo nella seconda:

$$\lambda^2 + 5\nu^2 = 0$$

Assumendo l'incognita come parametro, i.e. $\nu = \rho,\ \forall \rho \in \mathbb{C}$

$$\lambda = \pm i\rho\sqrt{5},\ \mu = 2\rho,\ \nu = \rho,\quad \forall \rho \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Si noti che abbiamo scartato il valore $\rho = 0$, in quanto riproduce la terna nulla che è priva di significato geometrico. Per $\rho = 1$, otteniamo le terne non proporzionali:

$$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \left(-i\sqrt{5}, 2, 1\right),\ \ (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = \left(i\sqrt{5}, 2, 1\right),$$

cioè i numeri direttori delle rette appartenenti rispettivamente a $\mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha)$ ed a $\mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$. Come preannunciato, riesce

$$\forall r \in \mathcal{F}_{iso}^{(1)}(\alpha),\ r^* \in \mathcal{F}_{iso}^{(2)}(\alpha)$$

Metodo 2

La più generale retta contenuta nel piano α ha una rappresentazione ordinaria:

$$r : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{6.43}$$

Determiniamo i suoi numeri direttori:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

onde

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ b' & c' \end{vmatrix} = c' + 2b', \ \mu = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ c' & a' \end{vmatrix} = -2a', \ \nu = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a' & b' \end{vmatrix} = -a'$$

Imponiamo l'isotropia

$$c' + 2b' + 4a'^2 + a'^2 = 0$$

Cioè

$$4b' + (4c')\, b' + \left(c'^2 + 5a'^2\right) = 0, \tag{6.44}$$

avendo assunto le incognite a' e c' come parametri, ponendo $a' = \rho$, $c' = \sigma$, $\forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$. Le radici della (6.39) sono

$$b'_{1,2} = \frac{-\sigma \pm i\rho\sqrt{5}}{2}$$

Per $\rho = \sigma = 1$

$$\begin{aligned} (a'_1, b'_1, c'_1) &= \left(1, -\frac{1 + i\sqrt{5}}{2}, 1\right) \\ (a'_2, b'_2, c'_2) &= \left(1, \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}, 1\right) \end{aligned} \tag{6.45}$$

Quindi

$$r \in \mathcal{F}^{(1)}_{iso}(\alpha) \Longrightarrow r : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - \left(1 + i\sqrt{5}\right) y + 2z + d' = 0 \end{cases}$$

Per un assegnato valore del coefficiente $d' \in \mathbb{C}$. Dalle (6.45) vediamo che la seconda terna di soluzioni è la complessa coniugata della prima:

$$(a'_2, b'_2, c'_2) = (a'^*_1, b'^*_1, c'^*_1),$$

come appunto deve essere. Riesce dunque:

$$r^* \in \mathcal{F}^{(2)}_{iso}(\alpha) \Longrightarrow r^* : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - \left(1 - i\sqrt{5}\right) y + 2z + d' = 0 \end{cases}$$

Assumendo il coefficiente d' come parametro libero, otteniamo le equazioni dei fasci impropri:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)}_{iso}(\alpha) &: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - \left(1 + i\sqrt{5}\right) y + 2z + k = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \\ \mathcal{F}^{(2)}_{iso}(\alpha) &: \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - \left(1 - i\sqrt{5}\right) y + 2z + d' = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{6.46}$$

Passiamo ora al quesito 2. Sostituendo le coordinate di P_0 nella seconda delle equazioni del fascio improprio $\mathcal{F}^{(1)}_{iso}(\alpha)$ (cfr. eq. 6.46):

$$6 - 2\left(1 + i\sqrt{5}\right) + 2 + k + k = 0 \Longrightarrow k = -6 + 2i\sqrt{5},$$

onde l'equazione di r_0 passante per P_0 è:

$$r_0 : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - \left(1 + i\sqrt{5}\right) y + 2z - 6 + 2i\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

Mentre l'altra retta r_0' è, per quanto precede, la complessa coniugata r_0^*:

$$r_0^* : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x - \left(1 - i\sqrt{5}\right) y + 2z - 6 - 2i\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

D'altra parte ciò è consistente, giacchè P_0 è un punto reale, per cui è $P_0 \in r \cap r^*$. Alternativamente, osservando che una terna ordinata di numeri direttori di una retta appartenente a uno dei due fasci è $\left(-i\sqrt{5}, 2, 1\right)$, si ha che una rappresentazione parametrica della retta r_0 per P_0 è:

$$x = 3 - i\sqrt{5}t, \;\; y = 2 + 2t, \;\; z = 1 + t, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

L'altra invece, è la complessa coniugata:

$$x = 3 + i\sqrt{5}t, \;\; y = 2 + 2t, \;\; z = 1 + t, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

Esercizio 119 *Assegnato il piano isotropo*

$$\alpha : 5ix + y + 2\sqrt{6}z + 4 = 0, \tag{6.47}$$

determinare l'equazione dell'unico fascio improprio $\mathcal{F}_{iso}(\alpha)$ di rette isotrope contenuto in α;

Svolgimento
La (4.26) si scrive

$$5ia' + b' + 2\sqrt{6}c' = 0 \tag{6.48}$$

Assumiamo come parametri indipendenti le incognite b' e c', per cui la (6.23) ammette le ∞^2 soluzioni:

$$a' = i\frac{\rho + 2\sqrt{6}\sigma}{5}, \;\; b' = \rho, \; c' = \sigma, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Consideriamo la soluzione particolare determinata da $\rho_1 = 1, \;\; \sigma_1 = 1$:

$$a_1' = i\frac{1 + 2\sqrt{6}}{5}, \;\; b_1' = 1, \; c_1' = 1,$$

per cui l'equazione della generica retta isotropa si scrive:

$$r : \begin{cases} 5ix + y + 2\sqrt{6}z + 4 = 0 \\ i\left(1 + 2\sqrt{6}\right) x + 5y + 5z + 5d = 0 \end{cases}$$

Quindi ponendo $5d = k$, si ha

$$\mathcal{F}_{iso}(\alpha) : \begin{cases} 5ix + y + 2\sqrt{6}z + 4 = 0 \\ i\left(1 + 2\sqrt{6}\right) x + 5y + 5z + k = 0 \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{C} \tag{6.49}$$

Esercizio 120 *Invertire il procedimento dell'esercizio precedente, cioè determinare l'equazione dell'unico piano isotropo passante per la retta isotropa*

$$r : \begin{cases} 5ix + y + 2\sqrt{6}z + 4 = 0 \\ i\left(1 + 2\sqrt{6}\right) x + 5y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \tag{6.50}$$

Svolgimento

L'equazione del piano isotropo α contenente r è

$$\lambda (x - x_0) + \mu (y - y_0) + \nu (z - z_0) = 0, \tag{6.51}$$

dove (λ, μ, ν) è una terna ordinata di numeri direttori di r, e $(x_0, y_0, z_0) \in r$. Determiniamo i numeri direttori con il solito procedimento:

$$M = \begin{pmatrix} 5i & 1 & 2\sqrt{6} \\ i\left(1 + 2\sqrt{6}\right) & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{6} \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\left(1 - 2\sqrt{6}\right),$$

$$\mu = \begin{vmatrix} 2\sqrt{6} & 5i \\ 5 & i\left(1 + 2\sqrt{6}\right) \end{vmatrix} = i\left(2\sqrt{6} - 1\right)$$

$$\nu = \begin{vmatrix} 5i & 1 \\ i\left(1 + 2\sqrt{6}\right) & 5 \end{vmatrix} = 2i\left(12 - \sqrt{6}\right)$$

Per determinare $(x_0, y_0, z_0) \in r$ è conveniente passare ad una rappresentazione parametrica di r. A tale scopo riscriviamo le (6.50) nella forma

$$\begin{cases} y + 2\sqrt{6}z + 4 = -4 - 5i\rho \\ i\left(1 + 2\sqrt{6}\right)x + 5y + 5z = -1 - i\left(1 + 2\sqrt{6}\right)\rho \end{cases}, \tag{6.52}$$

avendo posto $x = \rho$, $\forall \rho \in \mathbb{C}$. Risolvendo il sistema lineare (6.52):

$$x = \rho, \quad y = \frac{200 - 2\sqrt{6} - i\left(2\sqrt{6} - 1\right)\rho}{10\sqrt{6} - 5}, \quad z = \frac{2i\left(\sqrt{6} - 12\right)\rho - 19}{10\sqrt{6} - 5}, \quad \forall \rho \in \mathbb{C}$$

Per $\rho_0 = 0$:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{2\left(\sqrt{6} - 10\right)}{5\left(1 - 2\sqrt{6}\right)}, \quad z_0 = \frac{19}{5\left(1 - 2\sqrt{6}\right)}$$

La (6.51) si scrive:

$$5\left(1 - 2\sqrt{6}\right)x + i\left(2\sqrt{6} - 1\right)\left[y - \frac{2}{5}\left(\sqrt{6} - 10\right)\right] + 2i\left(12 - \sqrt{6}\right)\left(z - \frac{19}{5 - 10\sqrt{6}}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 5\left(1 - 2\sqrt{6}\right)x - i\left(1 - 2\sqrt{6}\right)y + 2i\left(12 - \sqrt{6}\right)z + \frac{2i}{5}\left(1 - 2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6} - 10\right) - \frac{38i\left(12 - \sqrt{6}\right)}{5 - 10\sqrt{6}} =$$

Dividendo primo e secondo membro per $-i\left(1 - 2\sqrt{6}\right)$:

$$5ix + y - \frac{2\left(12 - \sqrt{6}\right)}{1 - 2\sqrt{6}}z - \frac{2}{5}\left(\sqrt{6} - 10\right) + \frac{38\left(12 - \sqrt{6}\right)}{\left(5 - 10\sqrt{6}\right)\left(1 - 2\sqrt{6}\right)} = 0 \tag{6.53}$$

Semplifichiamo i singoli coefficienti.

$$\begin{aligned} -\frac{2\left(12 - \sqrt{6}\right)}{1 - 2\sqrt{6}} &= -\frac{2\left(12 - \sqrt{6}\right)}{1 - 2\sqrt{6}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{6}}{1 + 2\sqrt{6}} \\ &= -\frac{2 \cdot 23\sqrt{6}}{-23} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Procedendo in maniera analoga sul termine noto della (6.53), si ottiene la (6.47).

Esercizio 121 *Determinare i piani isotropi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ passanti per le rette isotrope r_1, r_2, r_3, r_4 dell'esercizio 108.*

Svolgimento

Per quanto visto, le rette r_k passano per $P_0\,(x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 1)$, per cui l'equazione del piano isotropo contenente la retta isotropa per P_0 è

$$\lambda\,(x - x_0) + \mu\,(y - y_0) + \nu\,(z - z_0) = 0,$$

dove (λ, μ, ν) è una terna ordinata di numeri direttori di r. Quindi

$$\alpha_1 : (1 - 2i)\,(x - 2) + (2 + 2i)\,(y + 1) + (2 - i)\,(z - 1) = 0$$

Cioè

$$\alpha_1 := (1 - 2i)\,x + 2\,(1 + i)\,y + (2 - i)\,z - 2 + 7i = 0$$

Il piano $\alpha_2 \supset r_2$

$$\alpha_2 : (4 - 4i)\,(x - 2) + (8 + i)\,(y + 1) + (1 + 8i)\,(z - 1) = 0$$

Cioè

$$\alpha_2 : 4\,(1 - i)\,x + (8 + i)? + (1 + 8iz) + i - 1 = 0$$

Il piano $\alpha_3 \supset r_3$

$$\alpha_3 : \sqrt{2}\,(x - 2) - i\,(y + 1) + i\,(z - 1) = 0$$

Cioè

$$\alpha_3 : \sqrt{2}x - iy + iz - 2\sqrt{2} - 2i = 0$$

Il piano $\alpha_4 \supset r_4$

$$\alpha_4 : -2i\,(x - 2) + i\,(y + 1) + i\sqrt{5}\,(z - 1) = 0$$

Cioè

$$\alpha_4 : 2ix - iy - i\sqrt{5}z + i\left(\sqrt{5} - 5\right) = 0$$

Esercizio 122 *(Tsto tratto da [4]). Scrivere le equazioni delle rette isotrope uscenti dall'origine ed appartenenti al piano $\alpha : x + y - z = 0$.*

Svolgimento

Osserviamo innanzitutto che essendo α reale, per la proposizione 67 i due fasci impropri di rette isotrope di α sono l'uno il complesso coniugato dell'altro.

Metodo 1

Una qualunque terna di numeri direttori di una retta isotropa di $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ è una soluzione del sistema di secondo grado

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso è

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases} \tag{6.54}$$

Ricaviamo λ dalla prima

$$\lambda = \nu - \mu,$$

e la sostituiamo nella seconda ottenendo

$$2\mu^2 - 2\mu\nu + 2\nu^2 = 0,$$

che è un'equazione quadratica in μ, assumendo ν come parametro. Quindi:

$$\mu_{1,2} = \frac{\nu \pm i\nu\sqrt{3}}{2},$$

per cui l'incognita λ è

$$\lambda_{1,2} = \nu - \mu_{1,2} = \frac{\nu \mp i\nu\sqrt{3}}{2}$$

Per $\nu = 1$ otteniamo le soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},\ \mu_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ \nu_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ \mu_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},\ \nu_1 = 1$$

Come preannunciato, risulta $\lambda_1 = \lambda_2^*,\ \mu_1 = \mu_2^*,\ \nu_1 = \nu_2^*$, onde basta scrivere l'equazione di una delle due rette uscenti dall'origine:

$$r : x = \rho\frac{1 - i\sqrt{3}}{2},\ y = \rho\frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ z = \rho,\quad \forall\rho \in \mathbb{C}, \tag{6.55}$$

essendo l'altra

$$r^* : x = \rho\frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ y = \rho\frac{1 - i\sqrt{3}}{2},\ z = \rho,\quad \forall\rho \in \mathbb{C}$$

Nella forma dei rapporti uguali:

$$r : \frac{2x}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{2y}{1 + i\sqrt{3}} = z$$

Metodo 2

La generica retta r contenuta nel piano α ammette una rappresentazione ordinaria del tipo:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

i cui numeri direttori si ottengono con il solito metodo, ovvero estraendo dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

i minori del secondo ordine cancellando la prima, seconda e terza colonna, prendendoli a segni alterni. Quindi:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ b' & c' \end{vmatrix} = b + c',\ \ \mu = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ c' & a' \end{vmatrix} = -\left(a' + c'\right),\ \ \nu = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a' & b' \end{vmatrix} = b' - a'$$

Imponiamo l'isotropia di r

$$\left(b + c'\right)^2 + \left(a' + c'\right)^2 + \left(b' - a'\right)^2 = 0$$

Espandendo i quadrati e ordinando i vari termini:

$$a'^2 + a'(c' - b') + b'^2 + c'^2 + b'c' = 0,$$

che è un'equazione di secondo grado in a'. Assumendo b', c' come parametri: $b' = \rho,\ c' = \sigma$, otteniamo le ∞^2 soluzioni:

$$a' = \frac{\rho - \sigma \pm \sqrt{-3(\rho^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma)}}{2}, \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}$$

Per $\rho = \sigma = 1$ abbiamo le terne di soluzioni:

$$\begin{aligned} a'_1 &= -i\sqrt{3},\ b'_1 = 1,\ c'_1 = 1 \\ a'_2 &= i\sqrt{3},\ b'_1 = 1,\ c'_1 = 1, \end{aligned}$$

riuscendo $a'_2 = a'^*_1$, $b'_2 = b'^*_1$, $c'_2 = c'^*_2$, in accordo con quanto asserito precedentemente. In definitiva:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -i\sqrt{3} + y + z + d' = 0 \end{cases}, \quad r' = r^*$$

Il problema richiede $O(0,0,0) \in r$, onde $d' = 0$:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -i\sqrt{3} + y + z = 0 \end{cases}, \quad r' = r^*$$

Per passare a una rappresentazione parametrica, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = t \\ i\sqrt{3} - y = t \end{cases}, \quad z = t, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

Sommando membro a membro:

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right) x = 2t \Longrightarrow x = \frac{2}{1 + i\sqrt{3}} t = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} t,$$

che sostituita nella prima:

$$y = t - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} t = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} t$$

Quindi

$$r : x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} t,\ y = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} t,\ z = t, \quad , \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

Cioè la (6.55).

Esercizio 123 *(Testo tratto da [5]). Assegnato il piano isotropo*

$$\alpha : 3x + 4y + 5iz - 60i = 0, \tag{6.56}$$

determinare le rette isotrope di α passanti per i punti P_1, P_2, P_3 di intersezione di α con gli assi coordinati del riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxyz)$ in cui è scritta la (6.56).

Svolgimento
I punti di intersezione di α con gli assi coordinati sono:

$$P_1\left(x_0 = 20i, y_0 = 0, z_0 = 0\right),\ P_2\left(x_0' = 0, y_0' = 15i, z_0' = 0\right),\ P_3\left(x_0'' = 0, y_0'' = 0, z_0'' = 12\right)$$

I numeri direttori delle rette richieste risolvono il sistema

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} 3\lambda + 4\mu + 5i\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo λ dalla prima:

$$\lambda = -\frac{1}{3}\left(4\mu + 5i\nu\right) \tag{6.57}$$

Sostituendo nella seconda:

$$\frac{1}{9}\left(4\mu + 5i\nu\right)^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$$

Espandendo, ordinando e assumendo $\nu = \rho$ come parametro:

$$25\mu^2 + \left(40i\rho\right)\mu - 16\rho^2 = 0,$$

che risolta rispetto a μ porge:

$$\lambda = -\frac{3}{5}i\rho,\ \mu = -\frac{4}{5}i\rho,\ \nu = \rho$$

Per $\rho = 5$

$$\lambda = -3i,\ \mu = -4i,\ \nu = 5$$

Se r_1 è la retta isotropa di α per P_1:

$$r_1 : x = x_0 + t\lambda,\ \ y = y_0 + t\mu,\ \ z = z_0 + t\nu,\ \ \ \forall t \in \mathbb{C}$$

Cioè

$$r_0 : x = 20i - 3it,\ y = -4it,\ z = 5t,\ \ \forall t \in \mathbb{C}$$

Se r_2 è la retta isotropa di α per P_2:

$$r_2 : x = x_0' + t\lambda,\ \ y = y_0' + t\mu,\ \ z = z_0' + t\nu,\ \ \ \forall t \in \mathbb{C}$$

Cioè

$$r_2 : x = -3it,\ y = 15i - 4it,\ z = 5t,\ \ \forall t \in \mathbb{C}$$

Se r_3 è la retta isotropa di α per P_3:

$$r_3 : x = x_0'' + t\lambda,\ \ y = y\prime_0' + t\mu,\ \ z = z_0'' + t\nu,\ \ \ \forall t \in \mathbb{C}$$

Cioè

$$r_3 : x = -3it,\ y = -4it,\ z = 12 + 5t,\ \ \forall t \in \mathbb{C}$$

Esercizio 124 *Determinare la retta reale del piano isotropo dell'esercizio precedente.*

È manifestamente $r \in \alpha \cap \alpha^*$:

$$r : \begin{cases} 3x + 4y + 5iz - 60i = 0 \\ 3x + 4y - 5iz + 60i = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro per poi semplificare:

$$3x + 4y = 0$$

Sottraendo membro a membro per poi semplificare:

$$z - 12 = 0$$

Cioè

$$r : \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ z - 12 = 0 \end{cases} \tag{6.58}$$

Esercizio 125 *Determinare i piani isotropi per la retta reale dell'esercizio 124.*

Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo di secondo grado:

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

In questo caso, però, le incognite sono (a, b, c), giacchè i numeri direttori λ, μ, ν sono calcolabili dalle (6.58):

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Precisamente:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4, \ \mu = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \ \nu = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

onde il sistema diventa:

$$\begin{cases} 4a - 3b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo b dalla prima

$$b = \frac{4}{3}a,$$

per sostituirla nella seconda

$$25a^2 + 9c^2 = 0,$$

che risolta rispetto a c

$$c = \pm\frac{5i}{3}\rho, \ \ \forall \rho \in \mathbb{C},$$

avendo assunto a come parametro. Per $\rho = 3$ otteniamo le terne:

$$a_1 = 3, \ b_1 = 4, \ c_1 = 5i$$
$$a_2 = a_1^*, \ b_2 = b_1^*, \ c_2 = c_1^*$$

Ne consegue che i piani richiesti sono:

$$\alpha : 3x + 4y + 5iz + d = 0; \ \ \alpha' = \alpha^*$$

Resta da determinare il coefficiente d. A tale scopo osserviamo che r è l'intersezione del piano β per l'origine:

$$\beta : 3x + 4y = 0,$$

con il piano β' parallello al piano coordinato xy

$$\beta' : z = 12$$

e che $(0, 0, 12) \in r \Longrightarrow (0, 0, 12) \in \alpha$, per cui

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5i \cdot 12 + d = 0 \Longrightarrow d = -60i$$

Cioè la (6.56) con la complessa coniugata.

Esercizio 126 *(Testo tratto da [5]). Determinare le rette isotrope del piano*

$$\alpha : y + z = 0$$

passanti per $P\,(1, 2, -2)$.

Svolgimento
Dalla proposizione 67 segue, con ovvio significato dei simboli:

$$\alpha = \alpha^* \Longrightarrow \mathcal{F}^2_{iso}\,(\alpha) = \left(\mathcal{F}^1_{iso}\,(\alpha)\right)^*$$

I numeri direttori delle rette di tali fasci, risolvono il sistema

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo μ dalla prima

$$\mu = -\nu,$$

per sostituirla nella seconda

$$\lambda^2 + 2\nu^2 = 0$$

Assumendo ν come parametro i.e. $\nu = \rho,\ \forall \rho \in \mathbb{C}$

$$\lambda = \pm i\sqrt{2}\rho$$

Quindi la soluzione generale è

$$\lambda = \pm i\sqrt{2}\rho,\ \ \mu = -\rho,\ \ \nu = \rho,\ \ \forall \rho \in \mathbb{C}$$

Per $\rho = 1$

$$\lambda_1 = i\sqrt{2},\ \mu_1 = -1,\ \nu_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \lambda_1^*,\ \mu_2 = \mu_1^*,\ \nu_2 = \nu_1^*$$

Una delle due rette isotrope di α passanti per $P\,(1, 2, -2)$ ammette la rappresentazione parametrica

$$r : x = 1 + i\sqrt{2}t,\ y = 2 - t,\ z = -2 + t,\ \ t \in \mathbb{C}$$

Per quanto precede, l'altra retta è $r' = r^*$.

Esercizio 127 *(Testo tratto da [5]). Determinare le rette isotrope del piano*

$$\alpha : x - 2y = 0$$

passanti per $P\,(2, 1, -1)$.

Svolgimento
Dalla proposizione 67 segue, con ovvio significato dei simboli:

$$\alpha = \alpha^* \Longrightarrow \mathcal{F}^2_{iso}\,(\alpha) = \left(\mathcal{F}^1_{iso}\,(\alpha)\right)^*$$

I numeri direttori delle rette di tali fasci, risolvono il sistema

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo λ dalla prima

$$\lambda = 2\mu$$

per sostituirla nella seconda

$$5\mu^2 + \nu^2 = 0$$

Assumendo μ come parametro i.e. $\mu = \rho,\ \forall \rho \in \mathbb{C}$

$$\nu = \pm i\sqrt{5}\rho$$

Quindi la soluzione generale è

$$\lambda = 2\rho,\ \ \mu = \rho,\ \ \nu = \pm i\sqrt{5}\rho,\ \ \forall \rho \in \mathbb{C}$$

Per $\rho = 1$

$$\begin{gathered} \lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 1,\ \nu_1 = i\sqrt{5} \\ \lambda_2 = \lambda_1^*,\ \mu_2 = \mu_1^*,\ \nu_2 = \nu_1^* \end{gathered}$$

Una delle due rette isotrope di α passanti per $P\,(2, 1, -1)$ ammette la rappresentazione parametrica

$$r : x = 2 + 2t,\ y = 1 + t,\ z = -1 + i\sqrt{5}t,\quad t \in \mathbb{C}$$

Per quanto precede, l'altra retta è $r' = r^*$.

Bibliografia

[1] Franchetta A., Morelli A, 1979. *Geometria analitica*, Liguori Editore

[2] Franchetta A., Morelli A, 1979. *Esercizi di Geometria, Parte 2 Geometria analitica*, Liguori Editore

[3] Jackson J.D., ede S., 2005. *Elettrodinamica classica*, Zanichelli

[4] Vaccaro G., 1967. *Esercizi e complementi di Geometria*, Veschi Editore

[5] De Paris G., Dicuonzo V., Volzone G., 1979. *Esercizi e complementi di Algebra lineare e Geometria analitica*, Veschi Editore