# Sostituzione iperboliche negli integrali indefiniti

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

**Esercizio 1** *Calcolare*

$$I(x) = \int \sqrt{a^2 + x^2}dx \tag{1}$$

**Soluzione**

Procediamo per sostituzione:

$$x = a \sinh t, \tag{2}$$

per cui

$$dx = a \cosh t dt \tag{3}$$

e

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 \left(1 + \sinh^2 t\right)} = a \cosh t \tag{4}$$

Quindi

$$I(t) = a^2 \int \cosh^2 t dt \tag{5}$$

Ma

$$\cosh 2t = 2 \cosh^2 t - 1 \Longrightarrow \cosh^2 t = \frac{1}{2} (\cosh 2t + 1) \tag{6}$$

Segue

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{a^2}{2} \int (\cosh 2t + 1) dt = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{2} \int \cosh 2t d(2t) + \int dt \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{2} \sinh 2t + t \right) + C = \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C \end{aligned} \tag{7}$$

Ripristiniamo la variabile $x$:

$$\sinh t = \frac{x}{a}, \ \cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2} \tag{8}$$

Dalle

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \ \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

ricaviamo

$$e^t = \sinh t + \cosh t = \frac{1}{a} \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \tag{9}$$

Cioè

$$t = \ln \left( \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right) = \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) - \ln a \tag{10}$$

Sostituendo nella (7):

$$I(x) = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2} + \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right] + C',$$

dove $C' = C - \ln a$. Ne concludiamo:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C' \tag{11}$$