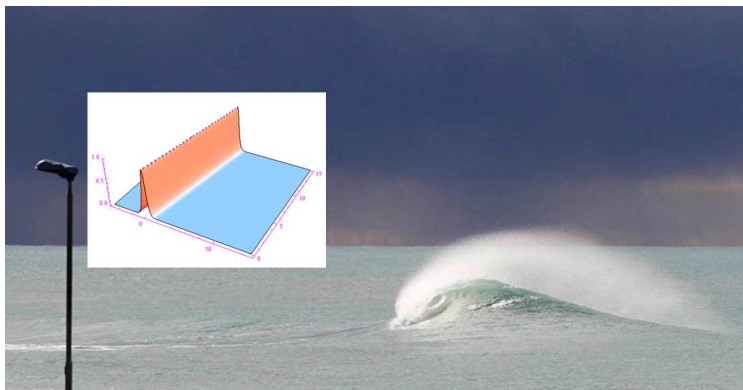


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Cercasi disperatamente Onda Solitaria

Marcello Colozzo



Indice

1	Evoluzione lineare	2
1.1	Il metodo della Trasformata di Fourier	2
1.2	Il fenomeno della dispersione	4
1.3	Dissipazione	6
2	Evoluzione non lineare	8
2.1	Equazione di Korteweg-de Vries. Solitoni	8
	Bibliografia	10

Capitolo 1

Evoluzione lineare

1.1 Il metodo della Trasformata di Fourier

La più semplice equazione d'onda è una PDE lineare del primo ordine:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

dove $\omega > 0$ è una grandezza con le dimensioni dell'inverso di un tempo che definiremo a breve, mentre $u(x, t)$ è la grandezza in propagazione che per semplicità consideriamo unidimensionale (asse x). Una particolare classe di soluzioni della (1.1) è

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad A = \text{ampiezza} \quad (1.2)$$

Sostituendo la 1.2 nella (1.1) otteniamo $k = 1$. Tale grandezza ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, e prendendo la parte reale si ottiene la soluzione elementare $\cos(kx - \omega t)$, da cui vediamo che ω è una pulsazione (o frequenza angolare):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

essendo T il periodo rispetto al tempo, mentre per quanto riguarda la grandezza k vediamo che è l'analogo della frequenza angolare rispetto alla coordinata spaziale x . Più precisamente, la funzione $\cos(kx - \omega t)$ è periodica rispetto a x , di periodo

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

che chiamiamo *lunghezza d'onda*. Il numero reale k è, dunque, il numero di oscillazioni complete nell'intervallo spaziale $[0, 2\pi]$. Tale circostanza suggerisce di denominare k *numero d'onde* (o semplicemente *numero d'onda*).

Si noti che $\cos(kx - \omega t)$ può essere riscritta come

$$\cos \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right] \quad (1.3)$$

da cui vediamo che le grandezze k, ω almeno formalmente, vengono introdotte per adimensionalizzare l'argomento della funzione $\cos$. Tale argomentazione ci ricorda la nozione di **onda piana** progressiva $f(x - vt)$ che si propaga lungo l'asse x con velocità v . Nel caso di

una funzione f sinusoidale/cosinusoidale l'onda si dice monocromatica. Ed è proprio il caso della (1.3), la cui velocità di propagazione è

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (1.4)$$

Ciò premesso, sia dato il problema di Cauchy relativo alla (1.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

che consiste nel trovare soluzioni con profilo iniziale $u_0(x)$. Come condizioni ai limiti, imponiamo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad \text{con sufficiente rapidità} \quad (1.6)$$

La linearità dell'equazione differenziale (1.2) implica che l'integrale generale si può esprimere come sovrapposizione lineare di soluzioni del tipo onda piana monocromatica (1.2), mentre la (1.6) ci consente di sviluppare $u(x, t)$ in integrale di Fourier nello spazio dei numeri d'onda k , attraverso le ben note relazioni:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\ \hat{u}(k, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dk \end{aligned} \quad (1.7)$$

Imponendo che il secondo membro delle (1.7) sia soluzione della (1.1) si perviene dopo semplici passaggi

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -i\omega(k) \hat{u} \quad (1.8)$$

che è un'equazione differenziale di immediata integrazione. Si noti che stiamo considerando la pulsazione ω come funzione del numero d'onda k . Otteniamo

$$\hat{u}(k, t) = C e^{-i\omega(k)t},$$

essendo C una costante di integrazione, che in realtà dipende da k . Più precisamente $C = \hat{u}(k, t) \equiv \hat{u}_0(k)$ ovvero la trasformata di Fourier del profilo iniziale:

$$\hat{u}_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) e^{-ikx} dx \quad (1.9)$$

Quindi:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) e^{-i\omega(k)t} \quad (1.10)$$

Abbiamo dunque stabilito il seguente algoritmo per la ricerca delle soluzioni del problema di Cauchy (1.5):

1. Eseguire la trasformata di Fourier del profilo iniziale dell'onda.
2. Applicare la (1.10) per determinare la trasformata di Fourier della soluzione.
3. Ricostruire per inversione di Fourier la soluzione a tutti i tempi:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \quad (1.11)$$

1.2 Il fenomeno della dispersione

Dalla (1.11) vediamo che un ruolo essenziale è svolto dalla funzione $\omega(k)$ che esprime la pulsazione in funzione del numero d'onda k . Per potere esplicitare efficacemente il significato fisico di tale funzione, riscriviamo l'integrando della (1.11) nella forma:

$$dA(k) e^{i[kx - \omega(k)t]},$$

avendo posto $dA(k) = \hat{u}_0(k) dk$ che è l'ampiezza delle componenti monocromatiche con numeri d'onda appartenenti all'intervallo infinitesimo $[k, k + dk]$. Ciò implica che la trasformata di Fourier del profilo iniziale è una *densità spettrale*

$$\hat{u}_0(k) = \frac{dA(k)}{dk}$$

ovvero l'ampiezza delle componenti monocromatiche per intervallo unitario di frequenza. In base alla (1.4) vediamo che la singola onda si propaga con velocità:

$$v_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} \quad (1.12)$$

che si chiama *velocità di fase*. Vediamo, dunque, che le singole onde si propagano a velocità diverse. Ora consideriamo il caso in cui la densità spettrale è estremamente piccata intorno a un numero d'onde k_0 , e che la funzione $\omega(k)$ vari lentamente in funzione di k . Ciò ci consente di sviluppare $\omega(k)$ in serie di Taylor intorno a k_0 , arrestando lo sviluppo al primo ordine:

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) \quad (1.13)$$

Sostituendo la (1.13) nell'integrale a secondo membro della (1.11) si ottiene la soluzione approssimata:

$$u(x, t) \simeq \frac{e^{i\left(k_0 \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t - \omega_0 t\right)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k) e^{ik\left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t\right)} dk \quad (1.14)$$

Confrontando con la (1.11):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k) e^{ik(x - v_g t)} dk = u\left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t, 0\right) = u_0\left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t\right)$$

Cioè

$$u(x, t) \simeq u_0(x - v_g t) e^{i(k_0 v_g t - \omega_0 t)} \quad (1.15)$$

avendo definito la grandezza con le dimensioni di una velocità

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

che si chiama *velocità di gruppo*. Dalla (1.15) vediamo che, a meno di un inessenziale fattore di fase, l'impulso $u(x, t)$ si propaga conservando il profilo iniziale e che la propagazione avviene alla velocità di gruppo. Più specificatamente, la (1.15) è un'onda piana (non monocromatica) progressiva con velocità v_g . Questo particolare tipo di onda è noto come

pacchetto d'onde (sovrapposizione lineare di onde piane monocromatiche con numero d'onda $k \in [k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}]$).

La soluzione $u(x, t)$ può essere ottenuta in modo esatto per un profilo iniziale dato da un'oscillazione sinusoidale modulata da una gaussiana. Precisamente, seguendo [1] consideriamo:

$$u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2L_0^2}} \cos(k_0 x) \quad (1.16)$$

cioè un'oscillazione sinusoidale di numero d'onda k_0 , modulata da una gaussiana di larghezza L_0 . Assumiamo poi la legge di dispersione:

$$\omega(k) = \omega_c \left(1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right) \quad (1.17)$$

dove ω_c è una pulsazione costante, mentre $a > 0$ è una lunghezza caratteristica. Da [1] segue che l'impulso conserva il profilo gaussiano la cui larghezza, però, aumenta in funzione del tempo secondo la legge:

$$L(t) = \sqrt{L_0^2 + \left(\frac{a^2 \omega_c t}{L_0} \right)^2} \quad (1.18)$$

Ne segue

$$L(t) \xrightarrow{L_0 \ll a} \frac{a^2 \omega_c t}{L_0} \quad (1.19)$$

Viceversa

$$L_0 \gg a \implies L(t) \simeq L_0 \quad (1.20)$$

In altri termini, se l'impulso iniziale è «molto stretto», la gaussiana si «allarga» rapidamente, mentre se è «sufficientemente largo» tende a conservare la larghezza iniziale.

L'allargamento veloce è noto come *sparpagliamento del pacchetto d'onde*, illustrato in 1.1.

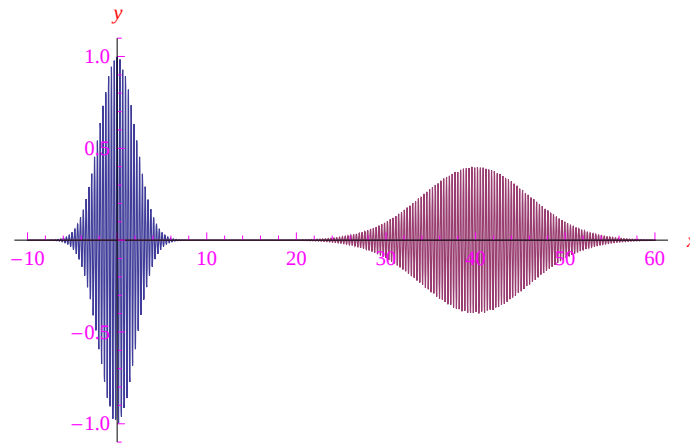


Figura 1.1: Sparpagliamento di un pacchetto d'onde gaussiano. Le unità di misura sono adimensionali.

1.3 Dissipazione

Nei casi di interesse fisico, occorre considerare l'energia trasportata dalla grandezza $u(x, t)$, e ci si aspetta che tale trasporto avvenga alla velocità di gruppo:

$$v_g = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k_0} \quad (1.21)$$

ove la derivata è calcolata in un conveniente punto di massimo k_0 della densità spettrale del profilo iniziale. Accanto al fenomeno della dispersione (§ 1.2) dobbiamo considerare gli effetti dissipativi esercitati dal mezzo materiale in cui si propaga la grandezza $u(x, t)$. Si osservi, tuttavia, che la (1.21) è una conveniente approssimazione, e volendo risolvere in maniera esatta, dobbiamo identificare la velocità di gruppo con la derivata prima della funzione $\omega(k)$:

$$v_g(k) = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (1.22)$$

onde si avrà una velocità di gruppo dipendente dal numero d'onda, eccetto il caso in cui la $\omega(k)$ è lineare. Ciò avviene, ad esempio, per un pacchetto d'onde elettromagnetiche che si propaga nel vuoto. In tal caso è $\omega(k) = ck$ essendo c la velocità della luce nel vuoto, per cui $v_g = c$. In questo caso particolare, non si verifica né la dispersione né la dissipazione di energia. In tutti gli altri casi, è matematicamente conveniente assumere $\omega(k)$ a valori complessi:

$$\begin{aligned} \omega &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &: k \in \mathbb{R} \longrightarrow \omega(k) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

per cui separiamo la parte reale dalla parte immaginaria:

$$\omega(k) = \operatorname{Re} \omega(k) + i \operatorname{Im} \omega(k)$$

Determiniamo ora gli effetti sul comportamento dell'onda. Senza perdita di generalità, consideriamo le soluzioni elementari (1.2), per cui

$$u(x, t) = A e^{(\operatorname{Im} \omega)t} e^{i[kx - (\operatorname{Re} \omega)t]},$$

ove abbiamo separato il fattore di propagazione dalla nuova ampiezza $A e^{(\operatorname{Im} \omega)t}$. Ne segue che se $\operatorname{Im} \omega > 0$ l'ampiezza dell'onda cresce esponenzialmente:

$$u(x, t) = A e^{-|\operatorname{Im} \omega|t} e^{i[kx - (\operatorname{Re} \omega)t]}$$

Viceversa, se $\operatorname{Im} \omega < 0$ l'ampiezza si smorza esponenzialmente. Dunque, quest'ultimo caso descrive matematicamente il processo di dissipazione.

Consideriamo ad esempio, l'equazione di conduzione del calore (problema unidimensionale):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.23)$$

essendo $B > 0$ il coefficiente di diffusione. Qui riteniamo tale grandezza costante (ciò equivale a richiedere omogeneità ed isotropia del mezzo conduttore). Imponendo che $u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$ sia soluzione della (1.23), si trova con semplici calcoli:

$$\omega(k) = -iBk^2$$

da cui la dissipatività del mezzo e quindi, della (1.23). L'annullarsi della parte reale implica l'assenza di propagazione:

$$u(x, t) = Ae^{-Bk^2t}e^{ikx}$$

per cui l'onda termica che stiamo considerando è esponenzialmente smorata e non in propagazione.

Da questa breve analisi si deduce che i processi dispersivi e dissipativi sono in un certo modo correlati. Ciò è una conseguenza della linearità dell'equazione differenziale di propagazione. Nel prossimo numero vedremo che se gli effetti nonlineari controbilanciano la dispersione, l'onda risultante non risente della dissipazione/dispersione.

Capitolo 2

Evoluzione non lineare

2.1 Equazione di Korteweg-de Vries. Solitoni

L'equazione di Korteweg-de Vries (KdV, da qui in poi) è una PDE del terzo ordine non lineare:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + Bu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

essendo $B > 0$ una costante. Un tipico valore è $B = 3$ (nelle opportune unità) per cui

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

Ricerchiamo soluzioni del tipo onda piana progressiva:

$$u(x, t) = y(x - vt)$$

essendo $y(\xi)$ una funzione da determinare, mentre $\xi = x - vt$. Sostituendo nella (2.2) otteniamo l'equazione differenziale in y

$$-vy' + y''' + 3yy' = 0$$

dove l'apice denota la derivata rispetto alla variabile ξ . Segue

$$y'' - vy + \frac{3}{2}y^2 = 0 \quad (2.3)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine non lineare, che può essere scritta come:

$$(y')^2 - vy^2 + y^3 = 0 \quad (2.4)$$

La soluzione è

$$y(\xi) = \frac{3v}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)}$$

Segue

$$u(x, t) = \frac{3v}{\cosh^2\left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right]} \quad (2.5)$$

il cui andamento è plottato in [1.1](#).

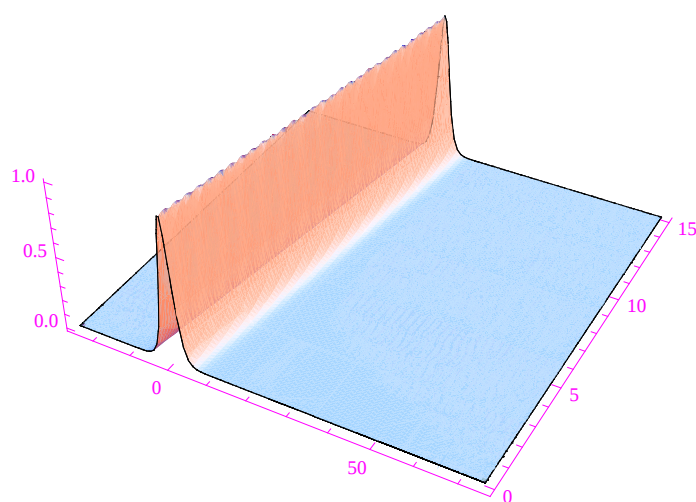


Figura 2.1: Andamento della soluzione (2.1).

Bibliografia

- [1] Jackson J.D., 1990. *Elettrodinamica classica*. Zanichelli