Sistemi di equazioni lineari

Marcello Colozzo -- http://www.extrabyte.info

LinearSolve

Mathematica risolve sistemi di equazioni lineari attraverso l'istruzione **LinearSolve**, la cui sintassi richiede la scrittura matriciale del sistema, cioè del tipo AX = B, dove $A = (a_{ik})$ è la matrice dei coefficienti, mentre X e B sono rispettivamente il vettore colonna delle incognite e il vettore colonna dei termini noti. Ad esempio, nel caso di un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite x, y, z, si ha:

```
In[1]:= A = {{0, 1, 2}, {2, -Sqrt[3], 1}, {1, -4, 0}}; B = {2, 1, -1};

In[2]:= X = LinearSolve[
          (*matrice dei coefficienti*)
          A,
          (*vettore dei termini noti*)
          B
         ]
```

Out[2]= $\left\{-1-\frac{16}{-15+2\sqrt{3}}, -\frac{4}{-15+2\sqrt{3}}, \frac{-13+2\sqrt{3}}{-15+2\sqrt{3}}\right\}$

```
In[3]:= x = X[[1]]
```

Out[3]= $-1-\frac{16}{-15+2\sqrt{3}}$

```
In[4]:= y = X[[2]]
```

Out[4]= $-\frac{4}{-15+2\sqrt{3}}$

```
In[5]:= z = X[[3]]
```

Out[5]= $\frac{-13+2\sqrt{3}}{-15+2\sqrt{3}}$

Verifica:

```
In[6]:= A.X == B

Out[6]= True
```

Proviamo con un sistema omogeneo:

```
In[7]:= Clear[X]

In[8]:= X = LinearSolve[
          A,
          {0, 0, 0}
         ]

Out[8]= {0, 0, 0}
```

Attenzione: nel caso omogeneo, l'istruzione **LinearSolve** restituisce solo la soluzione banale, ignorando le eventuali soluzioni non nulle (le cosiddette *soluzioni proprie* o *autosoluzioni*). Nel caso omogeneo bisogna utilizzare l'istruzione

`NullSpace` che restituisce una base dello spazio nullo della matrice dei coefficienti:

```
In[9]:= A // NullSpace
Out[9]= { }
```

cioè il sottospazio improprio, per cui il sistema assegnato ammette la sola soluzione banale. Ciò è confermato dalla determinazione del rango di A (che in questo caso è uguale al numero delle incognite)

```
In[10]:= A // MatrixRank
Out[10]= 3
In[11]:= Clear[A, B, X]
```

Consideriamo quest'altro esempio:

```
In[12]:= A = {{2, 7, -3}, {2, -3, 2}, {2, 3, -1}};
```

Riesce:

```
In[13]:= A // MatrixRank
Out[13]= 2
```

onde il sistema $AX = 0$ ammette ∞^1 autosoluzioni. Proviamo a determinarle con il comando **`LinearSolve`**:

```
In[14]:= LinearSolve[
          A,
          {0, 0, 0}
         ]
Out[14]= {0, 0, 0}
```

che come preannunciato, restituisce la sola soluzione banale. Utilizzando **`NullSpace`**

```
In[15]:= A // NullSpace
Out[15]= {{-1, 2, 4}}
```

per cui la soluzione generale è $\lambda(-1, 2, 4)$, essendo λ un numero reale arbitrario. Possiamo comunque forzare *Mathematica* attraverso il comando **`Solve`**

```
In[16]:= X = {x, y, z};
In[17]:= Solve[
          A.X == {0, 0, 0},
          X
         ]
```

General::ivar : $\frac{-13+2\sqrt{3}}{-15+2\sqrt{3}}$ is not a valid variable. ≫

General::ivar : $\frac{-13+2\sqrt{3}}{-15+2\sqrt{3}}$ is not a valid variable. ≫

Out[17]= $\text{Solve}\left[\text{False}, \left\{-1-\frac{16}{-15+2\sqrt{3}}, -\frac{4}{-15+2\sqrt{3}}, \frac{-13+2\sqrt{3}}{-15+2\sqrt{3}}\right\}\right]$

o con **`Reduce`**

In[18]:=
```
Reduce[
 A.X == {0, 0, 0},
 X
]
```

Reduce::ivar : $-1-\frac{16}{-15+2\sqrt{3}}$ is not a valid variable. ≫

Out[18]= $\text{Reduce}\left[\text{False}, \left\{-1-\frac{16}{-15+2\sqrt{3}}, -\frac{4}{-15+2\sqrt{3}}, \frac{-13+2\sqrt{3}}{-15+2\sqrt{3}}\right\}\right]$

che però restituisce solo una delle infinite soluzioni non nulle.

In[19]:=
```
Clear[A, B, X]
```

LinearSolveFunction

Se nell'istruzione **`LinearSolve`** non specifichiamo il vettore dei termini noti, *Mathematica* restituisce una **`LinearSolveFunction`**:

In[20]:= $\mathbf{A = \left\{\{2, 5\}, \left\{-1, \sqrt{2}\right\}\right\};}$

In[21]:=
```
linearsolve = LinearSolve[A]
```

Out[21]=
```
LinearSolveFunction[{2, 2}, <>]
```

Ad esempio, se il vettore dei termini noti è

In[22]:=
```
B = {2, -3};
```

In[23]:=
```
linearsolve[B] // Simplify
```

Out[23]= $\left\{1+\frac{5}{\frac{5}{2}+\sqrt{2}}, -\frac{4}{5+2\sqrt{2}}\right\}$

Verifica:

In[24]:=
```
A.% == B
```

Out[24]=
```
True
```

In[25]:=
```
Clear[A, B]
```

Sistemi incompatibili

Per un sistema "quadrato" (i.e. la matrice dei coefficienti è una matrice quadrata) con rango minore del numero delle incognite, **`LinearSolveFunction`** da un messaggio di errore

In[29]:=
```
A = {{1, 1}, {1, 1}};
```

In[30]:=
```
linearsolve = LinearSolve[A]
```

LinearSolve::sing1 : The matrix {{1, 1}, {1, 1}} is singular so a factorization will not be saved.

Out[30]=
```
LinearSolveFunction[{2, 2}, <>]
```

In ogni caso restituisce il risultato corretto:

In[31]:=
```
linearsolve[{2, 2}]
```

Out[31]=
```
{2, 0}
```

Per un vettore dei termini noti del tipo $(b, -b)$ il sistema è incompatibile:

In[32]:=
```
linearsolve[{b, -b}]
```

LinearSolve::nosol : Linear equation encountered that has no solution. ≫

Out[32]=
```
LinearSolveFunction[{2, 2}, <>][{b, -b}]
```