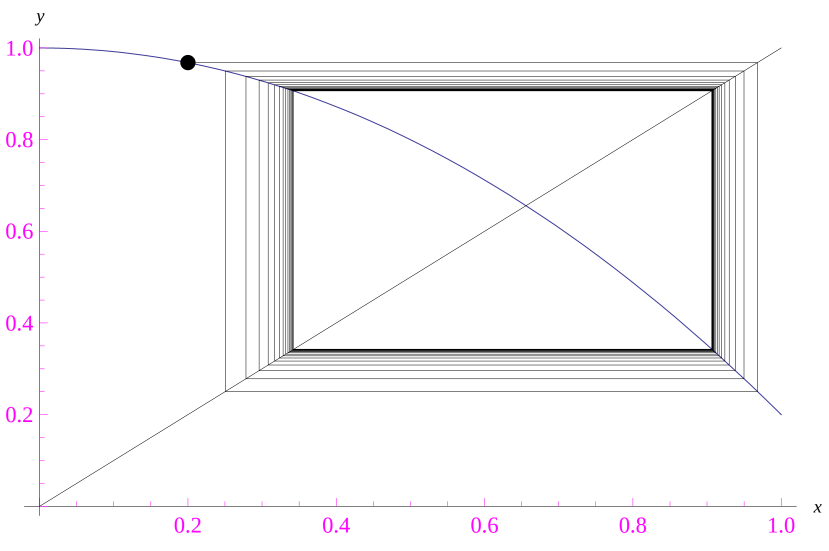
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Sistemi dinamici a tempo discreto

Marcello Colozzo



Indice

1 Sistemi dinamici a tempo continuo

Consideriamo un sistema dinamico a tempo continuo, ovvero un sistema (fisico, biologico, etc.) caratterizzato da una grandezza x (*stato* del sistema) la cui evoluzione temporale è regolata da una assegnata equazione differenziale. In particolare, riferiamoci a un'equazione del primo ordine di forma normale[1]:

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{1}$$

dove $F : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Senza perdita di generalità, riferiamoci a un insieme del tipo:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 \leq t \leq t_2, \ \ -\infty < x < +\infty \right\} \\ &= [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Se a un istante iniziale $t_0 \in [t_1, t_2]$ lo stato del sistema è x_0, l'evoluto temporale di x è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Definizione 1 *Il problema di Cauchy (2) è **compatibile** e **determinato** se esiste ed è unica la soluzione. Il problema è **incompatibile** (o **impossibile**) se è privo di soluzioni. Infine, il problema è compatibile e **indeterminato**, se ammette più soluzioni.*

Ciò premesso, enunciamo (senza dimostrare) il seguente teorema:

Teorema 2 *(**Teorema di esistenza**)*
Sia dato il problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{3}$$

dove $F : D \to \mathbb{R}$, essendo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $D = [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty)$.
***Hp.** F è continua in D.*
***Th.** $\forall (t_0, x_0) \in \mathring{D}, \ \exists \xi(t) \in C^1(I(t_0)) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F[t, \xi(t)] \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in I(t_0)$,*
essendo $I(t_0) \subseteq [t_1, t_2]$ un intorno di t_0.

Tale teorema assicura l'esistenza della soluzione del problema di Cauchy (3) solo in un opportuno intorno del punto iniziale. Illustriamo quanto detto considerando l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = -x^2 \tag{4}$$

per cui $F(t, x) = -x^2$. In questo caso è $[t_1, t_2] = (-\infty, +\infty)$, per cui è $D = \mathbb{R}^2$ e F è ivi continua. Pertanto è verificata l'ipotesi del Teorema di esistenza. Conseguentemente, comunque prendiamo $(t_0, x_0) \in \mathring{D} = \mathbb{R}^2$, esiste, in un opportuno intorno I di t_0, la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Per verificare tale asserzione, iniziamo con l'osservare che l'integrale generale di $\dot{x} = -x^2$ è:

$$x(t, C) = \frac{1}{t + C}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \tag{6}$$

[1] Le grandezze x e t sono espresse in unità adimensionali.

Infatti, derivando la (6):

$$\frac{d}{dt}x(t,C) = -\frac{1}{(t+C)^2} \tag{7}$$

La sostituzione della (7) nella (4) restituisce un'identità. Deve essere:

$$x(t_0, C) = x_0,$$

cioè

$$\frac{1}{t_0 + C} = x_0,$$

da cui l'unico valore della costante di integrazione

$$C_0 = \frac{1}{x_0} - t_0, \tag{8}$$

che individua l'integrale particolare risolvente il problema di Cauchy assegnato. Più precisamente:

$$\xi(t) = x(t, C_0) = \frac{x_0}{(t-t_0)x_0 + 1} \tag{9}$$

Per quanto visto risulta $[t_1, t_2] = \mathbb{R}$, ma $\xi(t) \notin C^1(\mathbb{R})$ in quanto $\xi(t)$ e $\dot{\xi}(t)$ hanno una singolarità in $t_0' = t_0 - x_0^{-1}$. Più specificatamente, la funzione $\xi(t)$ è definita in $\left(-\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}\right) \cup \left(t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty\right)$. E poichè t_0 è un punto iniziale, si ha che l'integrale (9) risolve il problema di Cauchy (5) non per ogni $t \in (-\infty, +\infty)$, ma in uno dei due intervalli $\left(-\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}\right)$ o $\left(t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty\right)$. Precisamente, quello che risulta essere un intorno di t_0:

$$I(t_0) = \begin{cases} \left(t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty\right), & \text{se } x_0 > 0 \\ \left(-\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}\right), & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Se $x_0 = 0$, dalla (8) vediamo che $|C_0| \to +\infty$, per cui la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ x(t_0) = 0 \end{cases}, \tag{11}$$

è la funzione identicamente nulla $\xi(t) \equiv 0$, come del resto si evince dalla (9) ponendo $x_0 = 0$. Ad esempio, per $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$, la soluzione è :

$$\xi(t) = \frac{1}{t+1}$$

per $t \in I = (-1, +\infty)$, come illustrato in fig. 1. Se, invece, è $x_0 = -1$, la funzione:

$$\xi(t) = \frac{1}{t-1}$$

risolve il problema di Cauchy (5) in $I = (-\infty, 1)$ come illustrato in fig. 2.

Notiamo, infine, che la soluzione del problema di Cauchy (5) è unica:

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2, \ \exists! \xi(t) = \frac{x_0}{(t-t_0)x_0 + 1} \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = -\xi(t)^2 \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in I(t_0), \tag{12}$$

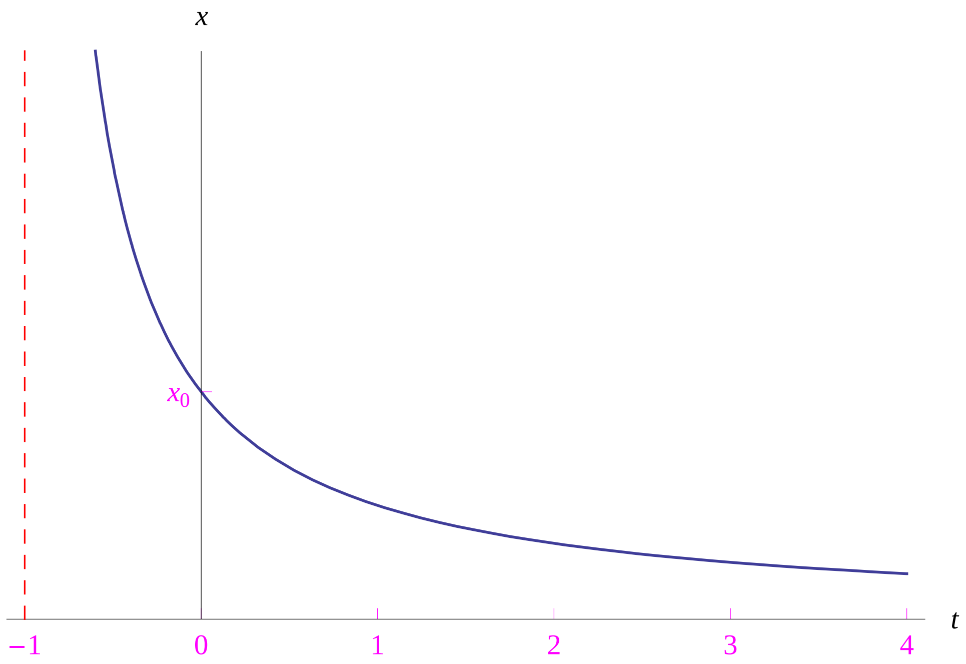


Figura 1: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (5) per $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$. La funzione $\xi(t)$ non è definita in $t = -1$, essendo ivi infinita.

Figura 2: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (5) per $t_0 = 0$ e $x_0 = -1$. La funzione $\xi(t)$ non è definita in $t = 1$, essendo ivi infinita.

dove $I(t_0)$ è dato dalla (10). Tuttavia, il Teorema 2 non garantisce l'unicità della soluzione del problema (3). Ciò perchè la continuità della funzione F è condizione necessaria ma non sufficiente per l'unicità della soluzione. Ad esempio, mostriamo che il seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{x} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{13}$$

ha più soluzioni. In (13) l'equazione differenziale è del tipo $\dot{x} = F(t,x)$ dove $F(t,x) = 2\sqrt{x}$. Tale funzione è definita in:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < t < +\infty,\ 0 \leq x < +\infty \right\} \\ &= \mathbb{R} \times [0, +\infty), \end{aligned}$$

che è il semipiano $x \geq 0$ del piano cartesiano tx, e la funzione è ivi continua. Pertanto è verificata l'ipotesi del Teorema di esistenza. Conseguentemente, comunque prendiamo $(t_0, x_0) \in \mathring{D} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, esiste, in un opportuno intorno I di t_0, la soluzione del problema di Cauchy (13). Iniziamo con l'osservare che l'integrale generale di $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ è:

$$x(t, C) = (t + C)^2$$

Deve essere

$$x(t_0, C) = x_0 \tag{14}$$

Cioè:

$$C_{\pm} = -t_0 \pm \sqrt{x_0} \tag{15}$$

Deve essere $x_0 \geq 0$. Ciò non deve sorprendere, poichè la funzione F non è definita per $x < 0$. Di conseguenza, $x(t)$ assume solo valori non negativi. Distinguiamo i due casi:

- $x_0 > 0$

  La (14) ammette due radici reali e distinte $C_{\pm}$ (15) a cui corrispondono due integrali particolari:

  $$\xi_{\pm}(t) = \xi(t, C_{\pm}) = \left(t - t_0 \pm \sqrt{x_0}\right)^2$$

  Ciò implica:

  $$\forall (t_0, x_0) \in \mathring{D},\ \exists \xi_{\pm}(t) = \left(t - t_0 \pm \sqrt{x_0}\right)^2 \mid \begin{cases} \dot{\xi}_{\pm}(t) = 2\sqrt{\xi_{\pm}(t)} \\ \xi_{\pm}(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

  Ad esempio, per $t_0 = 2$, $x_0 = 1$:

  $$\xi_{+}(t) = (t-1)^2,\ \xi_{-}(t) = (t-3)^2,$$

  il cui grafico è riportato in fig. (3). Risulta:

  $$\begin{aligned} (2,1) \in \mathring{D} \Longrightarrow \exists \xi_{+}(t) = (t-1)^2,\ \xi_{-}(t) = (t-3)^2 \mid \\ \begin{cases} \dot{\xi}_{\pm}(t) = 2\sqrt{\xi_{\pm}(t)} \\ \xi_{\pm}(2) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

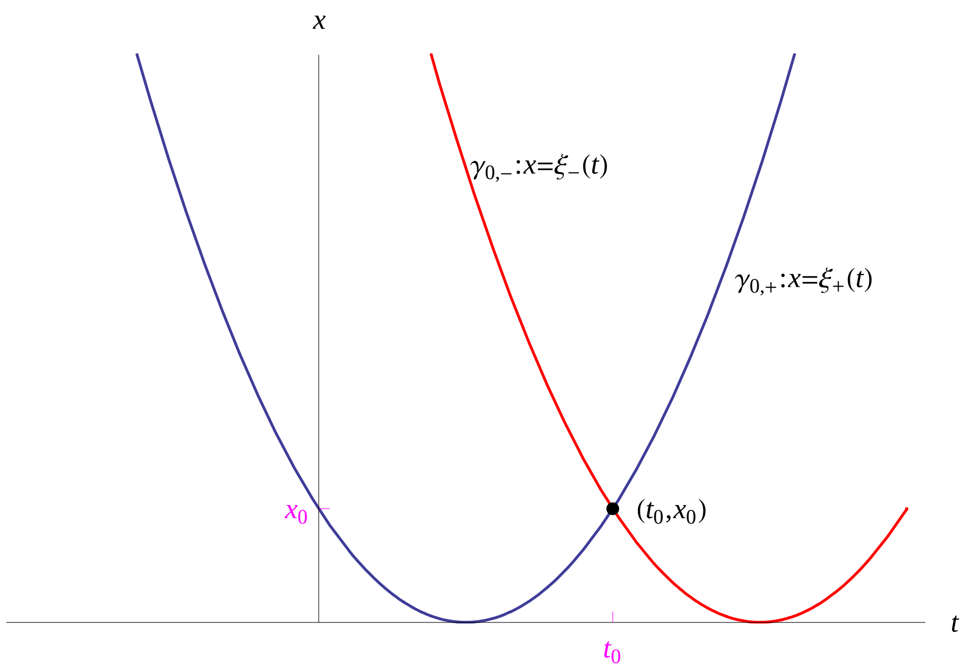


Figura 3: Grafico delle due soluzioni del problema di Cauchy (13) per $t_0 = 2$ e $x_0 = 1$.

- $x_0 = 0$

  In questo caso è $(t_0, 0) \notin \mathring{D}$, poichè è $\mathring{D} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, mentre l'enunciato del Teorema di esistenza si riferisce a punti iniziali quali punti interni al dominio D. Vale la pena, tuttavia, studiare il comportamento delle soluzioni per $x_0 = 0$. Per tale valore di x_0 la (14) ammette una sola radice reale: $C_0 = -t_0$, a cui corrisponde l'integrale particolare $\xi(t) = (t - t_0)^2$. Esiste, però, una seconda soluzione del problema di Cauchy (13): la funzione identicamente nulla in $\mathbb{R}$. Infatti, se $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = 0$, l'equazione differenziale $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ si riduce all'identità $0 = 0$. Inoltre è $x(t_0) = 0$ per cui è soddisfatta la condizione iniziale del problema di Cauchy (13). Assumendo, ad esempio, $t_0 = 2$ le soluzioni sono:

$$\xi_1(t) = (t-2)^2,\ \xi_2(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

  I grafici delle soluzioni $\xi_1(t), \xi_2(t)$ sono riportati in fig. 4.

Congettura 3 *La non unicità della soluzione del problema di Cauchy (13) è dovuta alla non continuità della derivata $F_x(t, x)$ in D.*

Infatti, $F_x(t, x) = x^{-1/2}$ ha una singolarità in $(t, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i.e. in ogni punto dell'asse t. Pertanto, l'insieme delle singolarità di F_x è:

$$S = \{(t, x) \in \mathbb{R} \mid -\infty < t < +\infty,\ x = 0\}$$

Risulta $S \subset D$, per cui la funzione F_x è continua in $D - S$ ma non in D. In realtà la condizione di continuità della derivata parziale $F_x(t, x)$ è sovrabbondante. Per enunciare una condizione più debole in grado comunque di garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (2) premettiamo la seguente definizione:

Definizione 4 ***(Condizione di Lipschitz)***

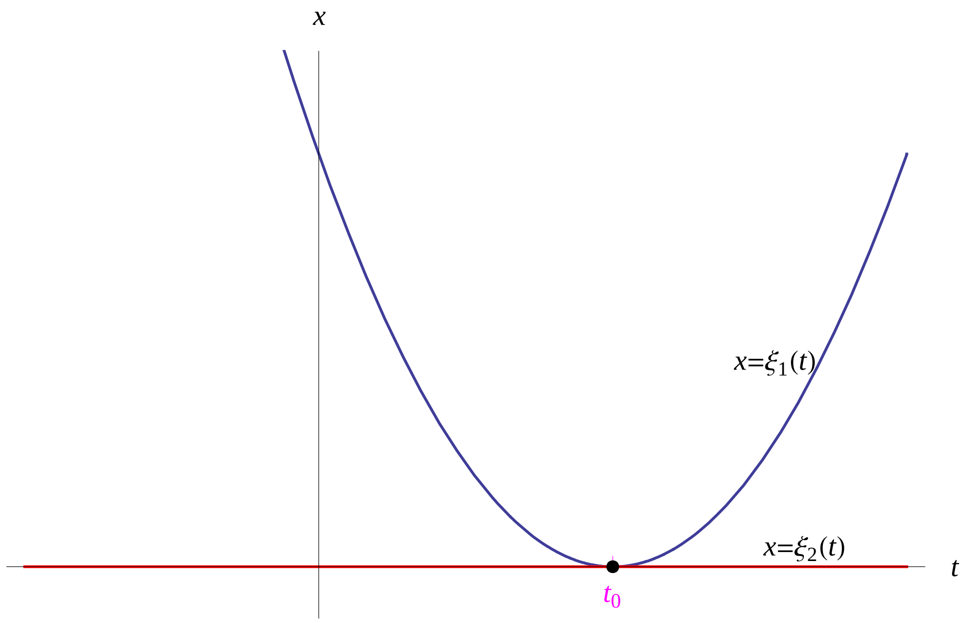


Figura 4: Grafico delle soluzioni $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ del problema di Cauchy (13) per $t_0 = 2$ e $x_0 = 0$.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ verifica} \\ \text{la condizione di Lipschitz} \end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\alpha > 0 \mid |f(x') - f(x'')| \leq \alpha |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in X \tag{16}$$

*Il numero reale positivo α si dice **coefficiente di Lipschitz**.*

Le funzioni che verificano la condizione (16) si dicono *lipschitziane*. Sussiste il seguente teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a [1].

Teorema 5

$$f \text{ è lipschitziana in } X) \Longrightarrow f \text{ è uniformemente continua in } X$$

Osservazione 6 *La condizione di Lipschitz (16) si può scrivere come:*

$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| \leq \alpha, \quad \forall x', x'' \in X, \ (x' \neq x'')$$

In altri termini, una funzione lipschitziana f ha i rapporti incrementali limitati.

Teorema 7 *(**Teorema di esistenza ed unicità o di Cauchy-Lipschitz**)*
Sia dato il problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{17}$$

dove $F : D \to \mathbb{R}$, essendo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $D = [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty)$.
***Hp**. La funzione F è continua in D ed è lipschitziana rispetto alla variabile x. Cioè:*

$$\exists\alpha > 0 \mid |F(t, x') - F(t, x'')| \leq \alpha |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$$

***Th**.*

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathring{D}, \ \exists\xi(t) \in C^1(I(t_0)) \mid \exists!\xi(t) \in C^1(I) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F[t, \xi(t)] \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in I(t_0),$$

essendo $I(t_0) \subseteq [t_1, t_2]$ un intorno di t_0.

In altri termini, una condizione *sufficiente* per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy (2), è che $F(t,x)$ sia lipchitiziana rispetto alla variabile x.

1.1 Sistemi autonomi

Gli esempi di equazioni differenziali che abbiamo considerato in precedenza, cioè $\dot{x} = -x^2$ e $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ sono tali che la funzione F non dipende esplicitamente da t. I corrispondenti sistemi dinamici si dicono *autonomi*, per cui:

$$\dot{x} = F(x), \tag{18}$$

con $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il problema di Cauchy (2) diventa:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{19}$$

Per tale classe di sistemi dinamici, il teorema 7 si enuncia:

Teorema 8 ***(Teorema di esistenza ed unicità o di Cauchy-Lipschitz)***
Hp. *$F(x)$ è lipschitziana*
Th.

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathring{D},\ \exists \xi(t) \in C^1(I(t_0)) \mid \exists! \xi(t) \in C^1(I) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F[\xi(t)] \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in I(t_0),$$

essendo $I(t_0) \subseteq [t_1, t_2]$ un intorno di t_0.

2 Metodo di Eulero

Riprendiamo il problema di Cauchy (19)

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{20}$$

Il *metodo di Eulero* è un algoritmo di risoluzione approssimata del problema (20). Osserviamo innanzitutto che l'equazione differenziale del primo ordine scritta in forma normale:

$$\dot{x} = F(x), \tag{21}$$

può essere scritta utilizzando la definizione di derivata:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = F(x) \tag{22}$$

Come è noto, $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ è il rapporto incrementale relativo alla funzione $x(t)$ e all'incremento Δt della variabile indipendente. Quest'ultimo è tale che $(t + \Delta t) \in [t_1, t_2], \ \forall t \in [t_1, t_2]$. Senza perdita di generalità supponiamo che sia $[t_1, t_2] = (-\infty, +\infty)$, e che il problema di Cauchy assegnato ammetta una soluzione in $I = [t_0, +\infty)$. Eseguiamo, quindi, una decomposizione $\mathcal{D}([t_0, +\infty))$, fissando ad arbitrio i punti $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ tali che:

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$$

cosicchè:

$$[t_0, +\infty) = \lim_{N \to +\infty} \bigcup_{n=1}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$$

Sia Δ la *norma* di $\mathcal{D}([t_0, +\infty))$, cioè:

$$\Delta = \max_{n \in \mathbb{N}} (t_{n+1} - t_n)$$

Senza perdita di generalità, ci riferiamo alle decomposizioni in cui gli intervalli (t_n, t_{n+1}) hanno la stessa ampiezza, onde:

$$t_{n+1} - t_n = \Delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per Δ "sufficientemente piccolo" possiamo approssimare l'intervallo $[t_0, +\infty)$ con l'insieme numerabile:

$$\{t_0, t_1, t_2, ..., t_n, ...\},$$

cosicchè:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \simeq \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\Delta}$$

In tale approssimazione, l'equazione differenziale (21) diventa:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta} = F(x_n), \tag{23}$$

dove $x_n = x(t_n)$. Dalla (23) otteniamo:

$$x_{n+1} = f_\Delta(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{24}$$

dove:

$$f_\Delta(x_n) \stackrel{def}{=} x_n + F(x_n) \cdot \Delta \tag{25}$$

Le (24) rappresentano una soluzione approssimata del problema di Cauchy (20). Più precisamente, le (24) generano una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di valori approssimati della soluzione di (20).

Esempio 9

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}, \tag{26}$$

cioè $F(x) = x$, che è manifestamente lipschitziana, per cui il problema proposto è compatibile e determinato, i.e. ammette una ed una sola soluzione $\xi(t)$. L'integrale generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = x$ è

$$x(t, C) = Ce^t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

dove C è un'arbitraria costante di integrazione. Deve essere:

$$x(0, C) = 1 \Longleftrightarrow C = 1,$$

onde

$$\xi(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ricerchiamo ora una soluzione approssimata con il metodo di Eulero. Abbiamo:

$$f_\Delta(x_n) = x_n(1 + \Delta), \tag{27}$$

per cui la (24) diventa:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n (1 + \Delta), & n = 0, 1, 2, ... \\ x_0 = 1 \end{cases} \tag{28}$$

Esplicitiamo alcuni valori:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= x_0 (1 + \Delta) = 1 + \Delta \\ x_2 &= x_1 (1 + \Delta) = (1 + \Delta)^2 \\ &\dots \\ x_n &= (1 + \Delta)^n, \end{aligned}$$

cioè la successione $\{x_n\}$ di elementi di $\mathbb{R}$ il cui termine n-esimo è $x_n = (1 + \Delta)^n$. Per $\Delta = \frac{1}{4}$ è $x_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$. Quindi i primi 4 termini sono:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = \frac{25}{16}, x_3 = \frac{125}{64},\ x_4 = \frac{625}{256} \tag{29}$$

In fig. 5 riportiamo x_n $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ in funzione di n.

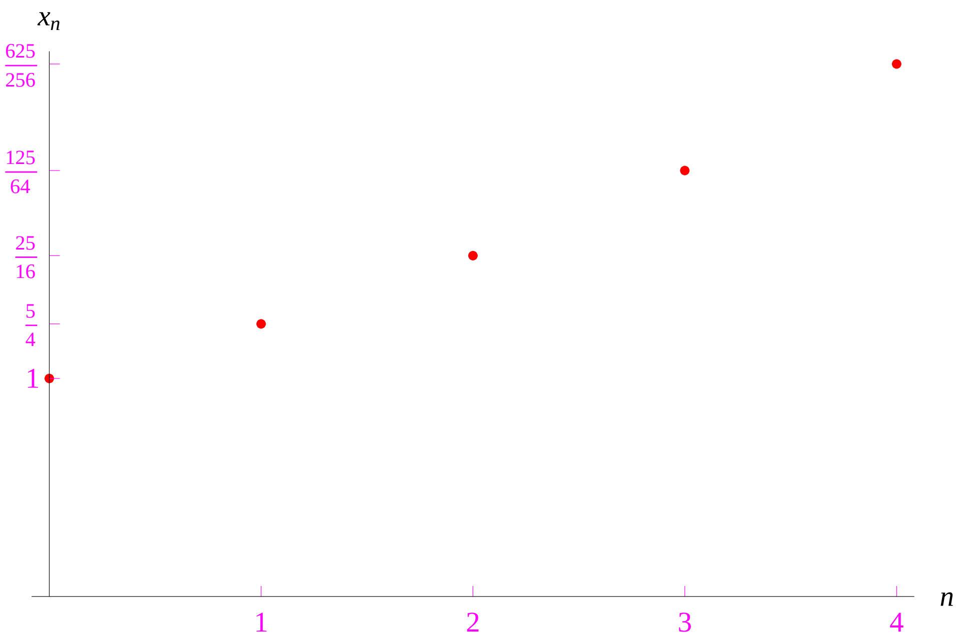


Figura 5: In questo grafico riportiamo i valori (29) in funzione di n.

Ma a noi interessa x in funzione di $t_n = n\Delta$ e non di n. In fig. (6) riportiamo, dunque, x_n in funzione di t_n.

In fig. 7 confrontiamo la soluzione esatta $x(t) = e^t$ con quella approssimata.

3 Ricorsione. Il metodo di König-Lemaray

Riprendiamo l'equazione (24)

$$x_{n+1} = f_\Delta (x_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{30}$$

essendo:

$$f_\Delta (x) = x + F(x) \cdot \Delta \tag{31}$$

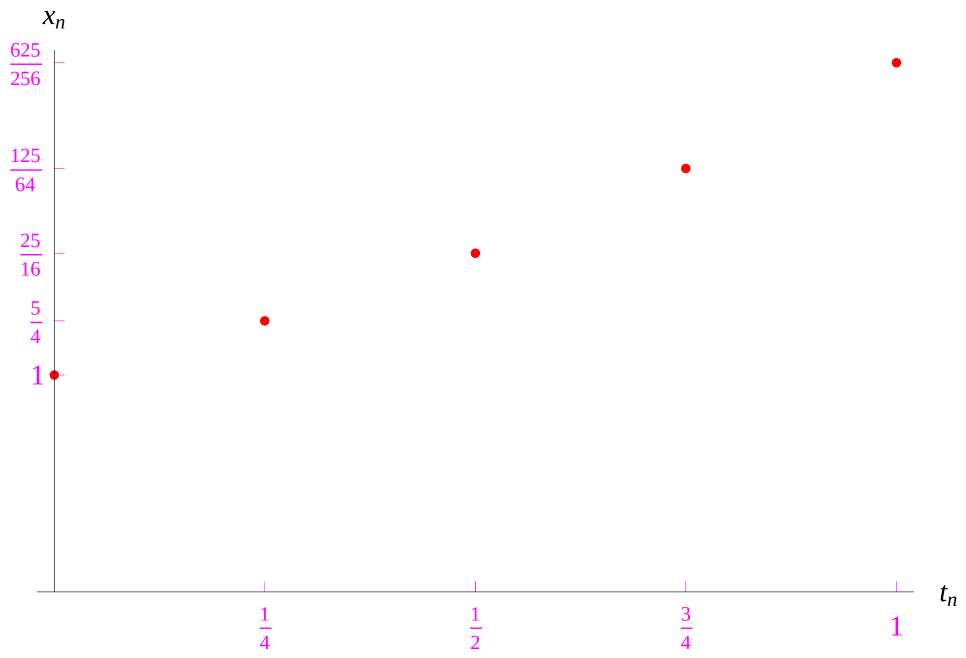


Figura 6: In questo grafico riportiamo i valori (29) in funzione di $t_n = n\Delta$ per $\Delta = \frac{1}{4}$..

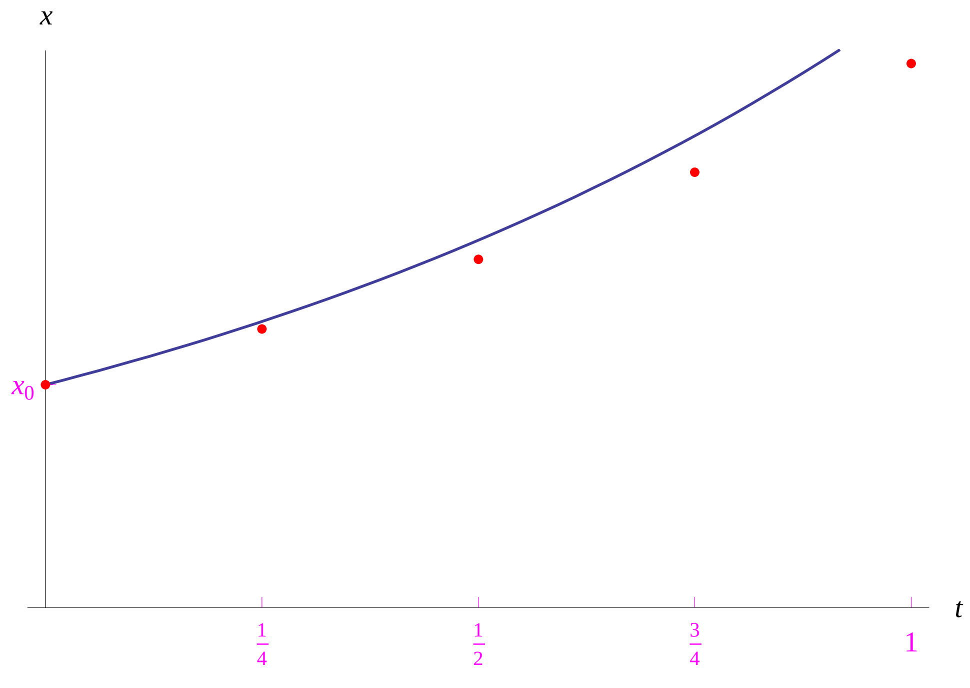


Figura 7: Grafico della soluzione esatta del problema confrontato con la soluzione esatta (26)

La (30) è un'*equazione di ricorrenza* e definisce l'evoluzione del sistema a tempo discreto che simula il comportamento del sistema a tempo continuo governato dalla (18), mentre la funzione (31) si chiama *funzione di trasferimento* del sistema a tempo discreto e si assume definita in $X \subseteq \mathbb{R}$.

Assegnato lo stato iniziale $x_0 \in X$, il processo di ricorrenza genera, dunque, una successione $\{x_n\}$ di elementi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_\Delta(x_0) \\ x_2 &= f_\Delta(x_1) = f_\Delta(f_\Delta(x_0)) \\ &\dots \\ x_n &= f_\Delta^n(x_0) \\ &\dots \end{aligned}$$

Qui f^n indica la composizione *n-esima* di una funzione f con se stessa eseguita n volte. Cioè:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Quindi:

$$f^0 = f, \;\; f^1 = f \circ f, \;\; f^2 = f \circ f \circ f, \dots$$

Ne consegue:

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esplicitando alcuni valori di n:

$$f^0(x_0) = f(x_0), \;\; f^1(x_0) = f(f(x_0)), \;\; f^2(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

Il *metodo di König-Lemaray* è un procedimento grafico che permette di visualizzare il processo ricorsivo (30) ed è illustrato in fig. 8, dove abbiamo considerato la funzione dell'esempio 9.

Riprendiamo il problema di Cauchy (13) con $x_0 = 1$ e $t_0 = 1$:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{x} \\ x(2) = 1 \end{cases}, \tag{32}$$

che per quanto precede, ammette le due soluzioni:

$$\xi_+(t) = (t-1)^2, \; \xi_-(t) = (t-3)^2$$

Risolviamo lo stesso problema con il metodo di Eulero. In questo caso la funzione da iterare è:

$$f_\Delta(x) = x + 2\sqrt{x} \cdot \Delta,$$

per cui

$$x_{n+1} = x_n + 2\sqrt{x_n} \cdot \Delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esplicitiamo alcuni valori:

$$\begin{aligned} &x_0 = 1 \\ &x_1 = x_0 + 2\sqrt{x_0} \cdot \Delta, \\ &x_2 = x_1 + 2\sqrt{x_1} \cdot \Delta = x_0 + 2\sqrt{x_0} \cdot \Delta + 2\sqrt{x_0 + 2\sqrt{x_0} \cdot \Delta} \cdot \Delta \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

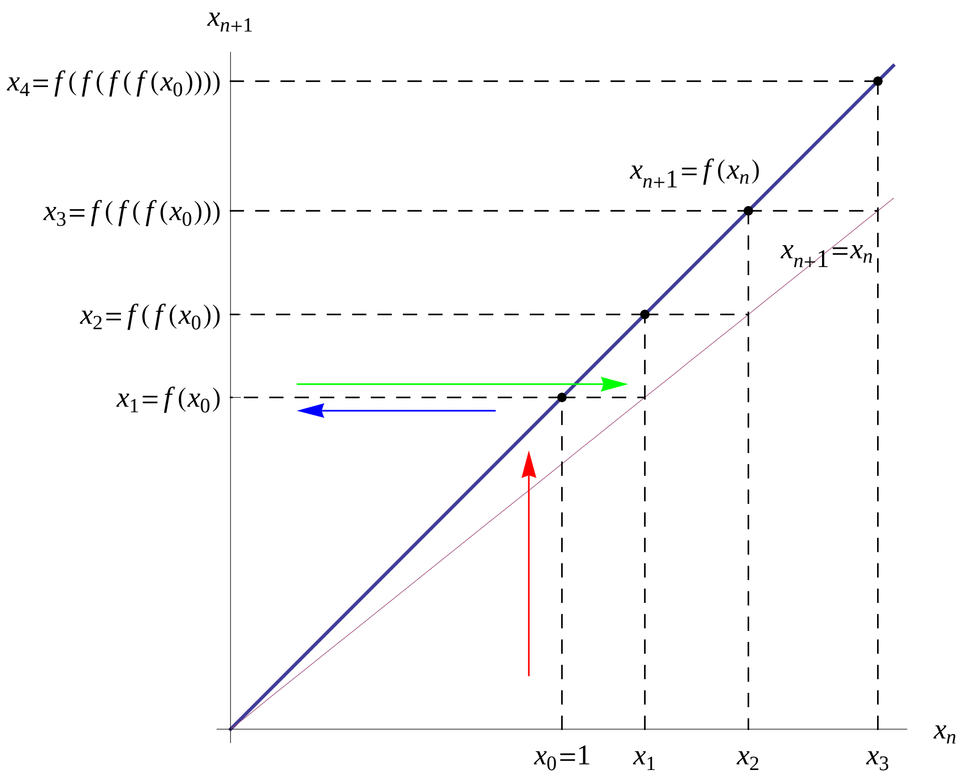


Figura 8: Procedimento grafico che visualizza il processo ricorsivo generato dalla funzione (27) con $\Delta = 1/4$. In un sistema di assi cartesiani ortogonali riportiamo in ascisse lo stato *n-esimo* x_n, e in ordinate lo stato *(n+1)-esimo* x_{n+1}. Quindi tracciamo il grafico della funzione che, in questo caso, è la retta grassettata. Tracciamo poi la retta $x_{n+1} = x_n$, ovvero il grafico della funzione identica $\phi : x \to x$. Assegnato lo stato iniziale x_0, resta univocamente definito lo stato $x_1 = f(x_0)$, la cui immagine inversa tramite ϕ è $f(x_0)$. Quest'ultimo è il nuovo stato che individua univocamente lo stato successivo $x_2 = f((f(x_0)))$, la cui immagine inversa tramite ϕ è $f((f(x_0)))$. Il procedimento viene iterato n volte.

Riferimenti bibliografici

[1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.

[2] Arbib. Brains M. A., 1987. *Machines and Mathematics*, McGraw-Hill.