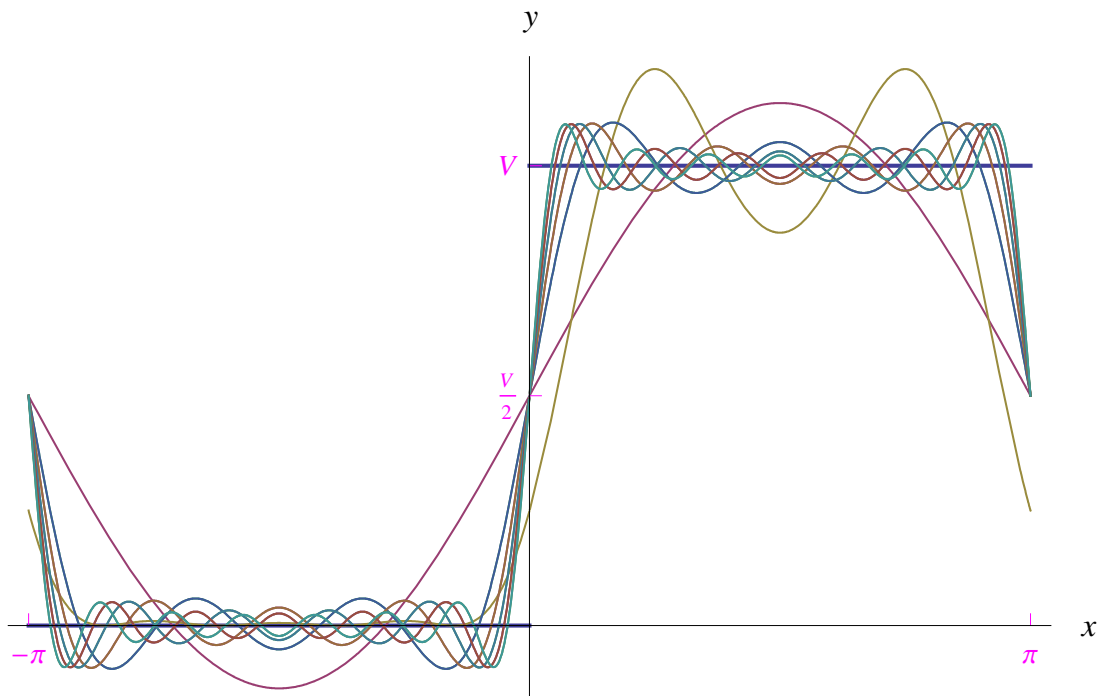


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Un approccio computazionale al problema della convergenza della serie di Fourier

Marcello Colozzo



Indice

1	Un'applicazione ai circuiti elettrici	5
1.1	Sviluppo in serie di Fourier	5
1.2	Il ruolo svolto dalla derivata prima	9
1.3	Il ruolo svolto dalla monotonia	27
2	Nozioni fondamentali	30
3	Serie di Fourier	31
3.1	Definizioni	31
3.2	Regolarità a tratti	32
3.3	Funzioni infinitamente oscillanti al finito	38
3.4	Classe di funzioni infinitamente oscillanti e derivabili	42
4	Sviluppo in serie di Fourier di una funzione infinitamente oscillante	42
A	Sviluppo in serie di Fourier della funzione (3)	46
B	Sviluppo in serie di Fourier della funzione (9)	47
C	Sviluppo in serie di Fourier della funzione ()	50
D	Funzioni lipschitziane	52
E	La funzione delta di Dirac	53
F	Studio della funzione	53
G	Sviluppo in serie di Fourier della funzione (24)	54
H	Sviluppo in serie di Fourier della funzione (30)	55
I	Sviluppo in serie della funzione (79)	56
	Bibliografia	57

Prefazione

La ricerca di condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza della serie di Fourier di una funzione periodica

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

è un problema aperto dell'Analisi matematica. Infatti, sono note solo alcune condizioni sufficienti – denominate *condizioni di Dirichlet* – che compongono un criterio di convergenza puntuale della serie, noto in letteratura come *Teorema di Dirichlet*.

Le condizioni di Dirichlet richiedono la continuità a tratti della funzione $f(x)$. Tuttavia nei punti in cui la funzione ha una discontinuità di prima specie, la serie di Fourier converge verso

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right],$$

essendo x_0 il punto di discontinuità. Inoltre, tali punti di discontinuità danno luogo al cosiddetto *fenomeno di Gibbs*, che consiste in oscillazioni dello sviluppo in serie con conseguente non convergenza, come possiamo vedere dal grafico di fig. 1.

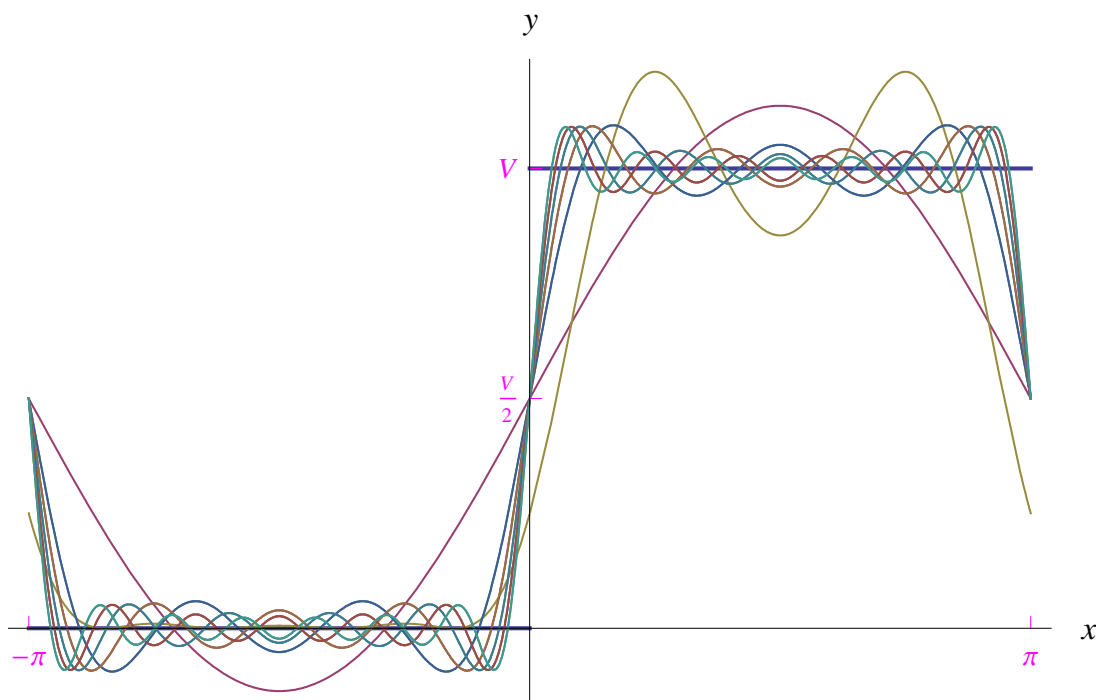


Figura 1: Approssimazione di una funzione a gradino con il suo sviluppo in serie di Fourier troncato a vari ordini. La serie di Fourier converge a $V/2$ nel punto di discontinuità di prima specie $x_0 = 0$, ma in un intorno $I_\delta(x_0) = (-\delta, \delta)$ esibisce delle oscillazioni che distruggono il processo di convergenza per $x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}$. Un comportamento analogo agli estremi dell'intervallo di periodicità, dove la funzione ha ancora una discontinuità di prima specie.

Questo lavoro è costituito da esperimenti computazionali eseguiti nell'ambiente di calcolo *Mathematica*, il cui scopo è quello di analizzare le cause della non convergenza della serie. Fondamentalmente, l'approccio si articola in due parti:

1. Il ruolo svolto dalla derivata di $f(x)$

2. Il ruolo svolto dalla monotonia di $f(x)$.

Per quanto riguarda la derivata, mostreremo che la non convergenza è dovuta non alla discontinuità di prima specie, ma alla non lipschitzianità della funzione $f(x)$. Ricordiamo che una funzione si dice *lipschitziana* se i suoi rapporti incrementali sono limitati in modulo (Appendice D). Ad esempio, nel caso di un impulso a gradino (fig. 1) se da $x < 0$ ci avviciniamo a $x = 0$, la funzione “salta” da 0 a $V > 0$ in corrispondenza di un incremento $\Delta x = 0$ della variabile indipendente. D'altra parte, come è ben noto [1], la derivata di una funzione a gradino non è definita come funzione, ma come distribuzione. In parole povere, i rapporti incrementali di una funzione con discontinuità di prima specie non sono limitati in modulo, da qui la non lipschitzianità della funzione medesima. Tuttavia, la somma parziale di ordine n associata alla serie di Fourier di $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right],$$

è una funzione lipschitziana. Ne consegue che affinché si verifichi un'approssimazione del tipo:

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right],$$

la funzione $f(x)$ deve essere lipschitziana. Nel caso contrario, la somma parziale non riesce a ricostruire la pendenza (∞) del grafico di $f(x)$. E ciò si verifica proprio nel caso di una discontinuità di prima specie. Aumentare l'ordine di approssimazione non serve, poichè la somma parziale conserva la lipschitzianità.

La non lipschitzianità si presenta anche nel caso di funzioni continue. Un tipico esempio è offerto dalla funzione

$$f(x) = \sqrt{x}, \tag{1}$$

che non è lipschitziana, giacchè la derivata prima $f'(x)$ “esplode” in singolarità:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty,$$

onde i rapporti incrementali di (1) non sono limitati in modulo. Quindi, per una funzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sqrt{-x}, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}, \tag{2}$$

la serie di Fourier non converge in un intorno di $x = 0$, come possiamo vedere dal grafico di fig. 2.

Riguardo al punto 2, cioè alla monotonia della funzione, le condizioni di Dirichlet richiedono una *monotonia a tratti* di $f(x)$, nel senso che deve essere possibile partizionare l'intervallo di periodicità in intervalli parziali in cui $f(x)$ è monotona. Ciò implica che comunque prendiamo un sottoinsieme dell'intervallo di periodicità, la funzione ammette ivi un numero finito di massimi/minimi.

Per quanto precede, il punto 2 è collegato al punto 1 poichè la monotonia è controllata dalla derivata.

Nella sezione 3.4 abbiamo costruito una classe di funzioni derivabili in \mathbb{R} (quindi continue) e *infinitamente oscillanti al finito*, nel senso che ogni funzione della classe compie un numero infinito di oscillazioni intorno a un punto assegnato x_0 . Ne consegue che una tale funzione non è monotona a tratti, poichè in ogni intorno di x_0 cade un numero infinito di massimi e minimi. Abbiamo mostrato, via software, che la serie di Fourier di una tale funzione pur riuscendo convergente, non converge alla funzione in ogni intorno di x_0 di ampiezza sufficientemente piccola. Tale non convergenza è

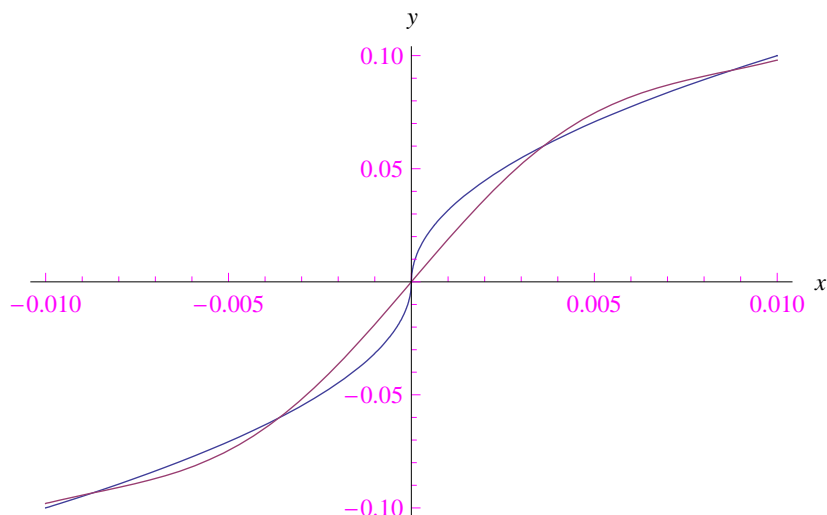


Figura 2: La curva blu è il grafico della funzione (2). L'altra, invece, è il grafico dello sviluppo in serie di Fourier troncato al termine di ordine $n = 600$. Nonostante l'ordine elevato, la sviluppo in serie non riesce a riprodurre la pendenza $(+\infty)$ di $f(x)$ in un intorno di $x = 0$.

riconducibile all'impossibilità da parte delle combinazioni lineari di $\sin kx$, $\cos kx$ che compongono la serie di Fourier, di ricostruire le rapide oscillazioni della funzione.

Concludiamo questa prefazione osservando che il fenomeno di Gibbs si presenta anche con altre approssimazioni polinomiali e non solo con i polinomi trigonometrici. Ad esempio, in [questa dispensa](#) una funzione con una discontinuità di prima specie viene approssimata attraverso i *polinomi di Legendre* e i *polinomi di Tchebichef* come mostrato dal grafico di fig. 3.

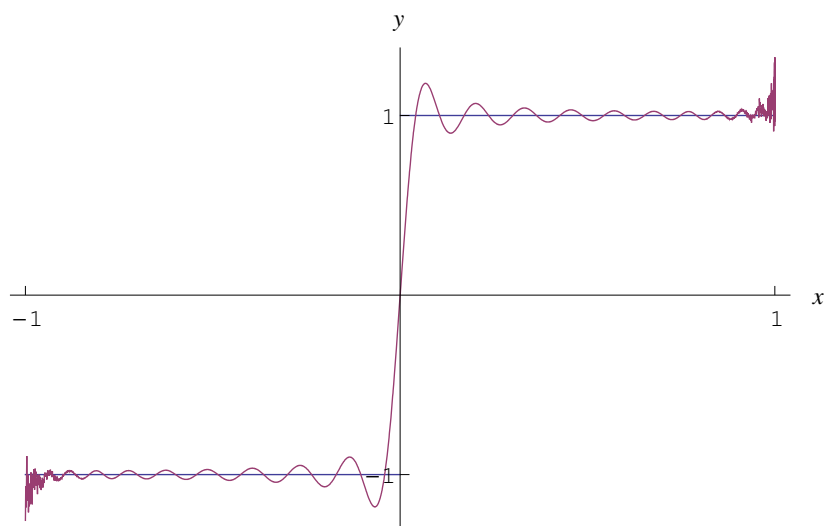


Figura 3: Approssimazione di una funzione con una discontinuità di prima specie in $x = 0$ con i polinomi di Legendre.

1 Un'applicazione ai circuiti elettrici

1.1 Sviluppo in serie di Fourier

Il comportamento dei circuiti elettrici in cui le grandezze in gioco hanno un andamento costante o variabile con legge sinusoidale in funzione del tempo, si presta ad un'analisi matematica immediata. Il problema si complica in presenza di forme d'onda diverse da quelle del tipo $v(t) = V \sin(\omega t + \phi)$. Si pensi, ad esempio, alla tensione in uscita in un raddrizzatore a onda completa:

$$v_{out}(t) = V |\sin \omega t|, \quad -\infty < t < +\infty \quad (3)$$

Nella (3) è $V = \text{costante}$, mentre $\omega > 0$ ha le dimensioni di una frequenza. La funzione (3) è graficata in fig. 4.

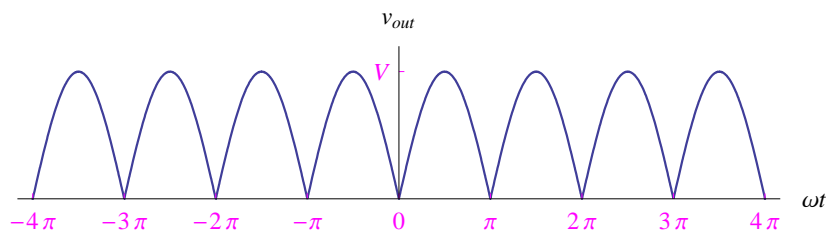


Figura 4: In questo grafico riportiamo l'andamento in funzione del tempo della tensione in uscita di un circuito raddrizzatore a onda completa. Si osservi che stiamo formalmente considerando istanti di tempo $t < 0$.

Riguardo al comportamento periodico, è immediato constatare che mentre la tensione in ingresso

$$v_{in}(t) = V \sin \omega t, \quad (4)$$

è una funzione periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, la tensione raddrizzata (3) ha periodo dimezzato $T = \frac{\pi}{\omega}$. Come è noto, la serie di Fourier è un potente algoritmo che permette di esprimere una grandezza periodica del tipo (3) attraverso la somma di (infiniti) termini sinusoidali. Il carattere infinito di tale operazione non deve spaventare, giacché è lecito troncare lo sviluppo a un ordine prefissato, in funzione dell'approssimazione richiesta.

Sviluppiamo, dunque, in serie di Fourier la funzione $v_{out}(t)$:

$$v_{out}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]$$

I coefficienti a_k, b_k sono dati da:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T v_{out}(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T v_{out}(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Calcolando gli integrali a secondo membro delle (5) (cfr. Appendice A), otteniamo:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= \frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{1-4k^2} \right] \\ &= \frac{2V}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega t) - \frac{2}{35} \cos(6\omega t) - \dots \right] \end{aligned} \quad (6)$$

All'ordine più basso:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &\simeq \frac{2V}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega t) \right] \\ &= \frac{2V}{\pi} - \frac{4V}{3\pi} \cos(2\omega t), \end{aligned} \quad (7)$$

che rappresenta l'armonica fondamentale. In fig. 5 confrontiamo il secondo membro della (7) con l'andamento effettivo di $v_{out}(t)$.

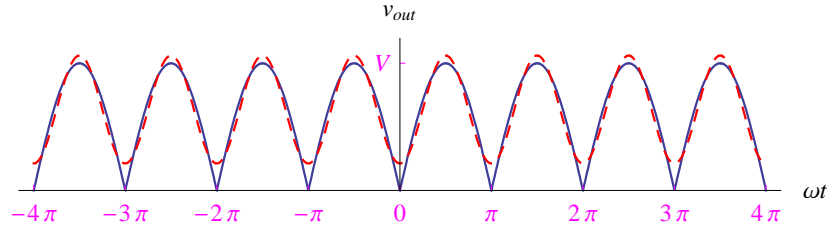


Figura 5: La curva tratteggiata è il grafico dell'armonica fondamentale.

Includendo altri termini:

$$v_{out}(t) \simeq \frac{2V}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega t) - \frac{2}{35} \cos(6\omega t) \right] \quad (8)$$

In fig. 6 confrontiamo il secondo membro della (7) con l'andamento effettivo di $v(t)$.

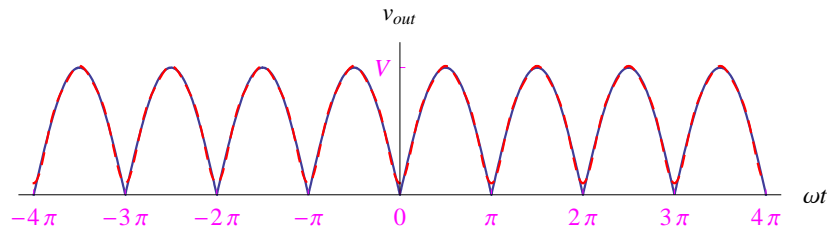


Figura 6: La curva tratteggiata è il grafico del secondo membro della (8)

Vediamo dunque che bastano pochi termini dello sviluppo in serie (6) per ottenere una buona approssimazione di $v_{out}(t)$. Consideriamo ora un esempio più complicato. Supponiamo di avere una tensione data dalla funzione periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}, \quad \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \\ V \sin \omega t, & \text{se } \frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \end{cases}, \quad (9)$$

il cui grafico è riportato in fig. 7.

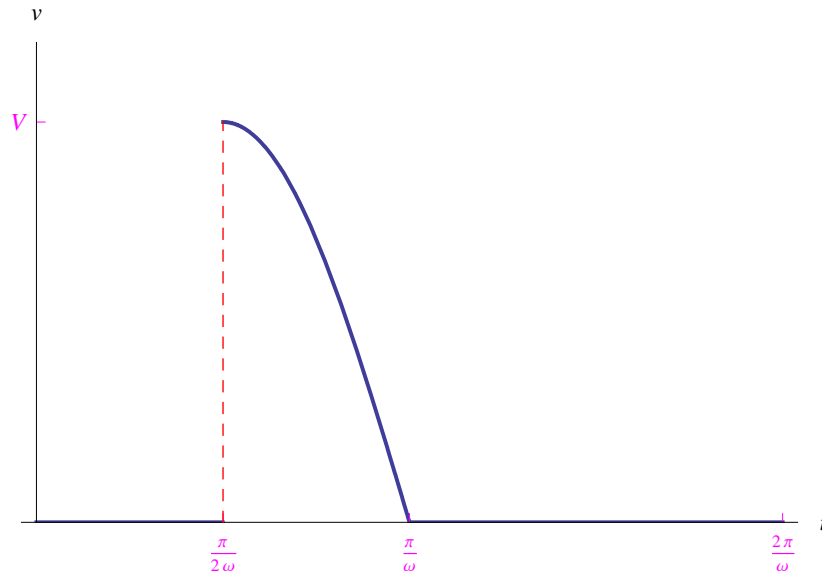


Figura 7: Andamento del segnale (9) nell'intervallo di periodicità $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$.

Lo sviluppo in serie di Fourier (Appendice B) si scrive

$$v(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \frac{V}{\pi} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{1-k^2} \left[k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^{k-1} \right] \cos(k\omega t) \quad (10)$$

$$+ \frac{V}{4} \sin \omega t - \frac{V}{\pi} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{1-k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \sin(k\omega t)$$

Al terzo ordine troviamo il grafico illustrato in fig. 8. Per $n = 20$ il confronto è riportato in fig. 9.

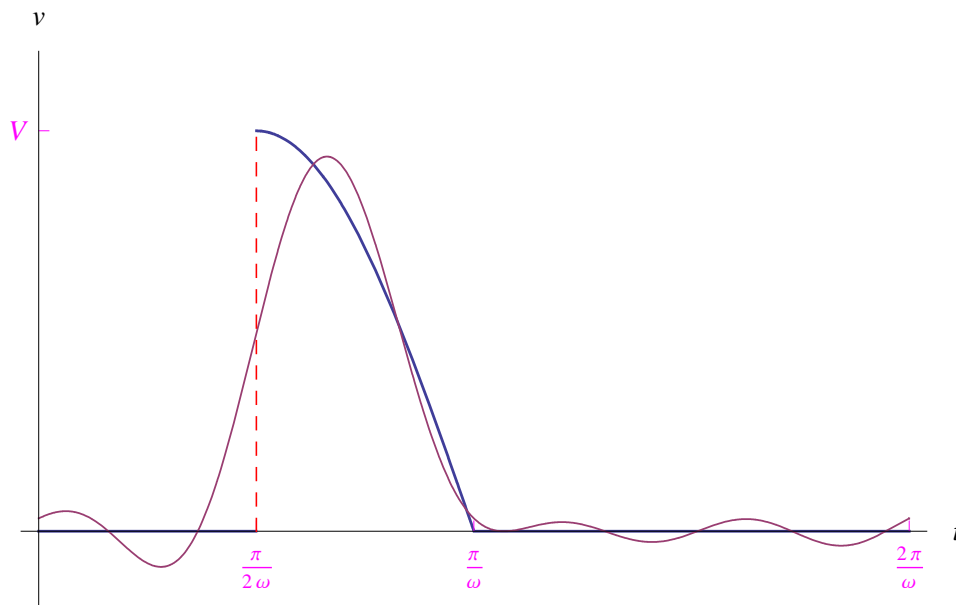


Figura 8: Confronto di $v(t)$ con il suo sviluppo di Fourier troncato al terzo ordine.

Analizzando i risultati dello sviluppo in serie di Fourier nei due casi (4)–(9) riportati nelle figg. 6–9, notiamo una differenza sostanziale: nel secondo esempio l'approssimazione realizzata dallo sviluppo

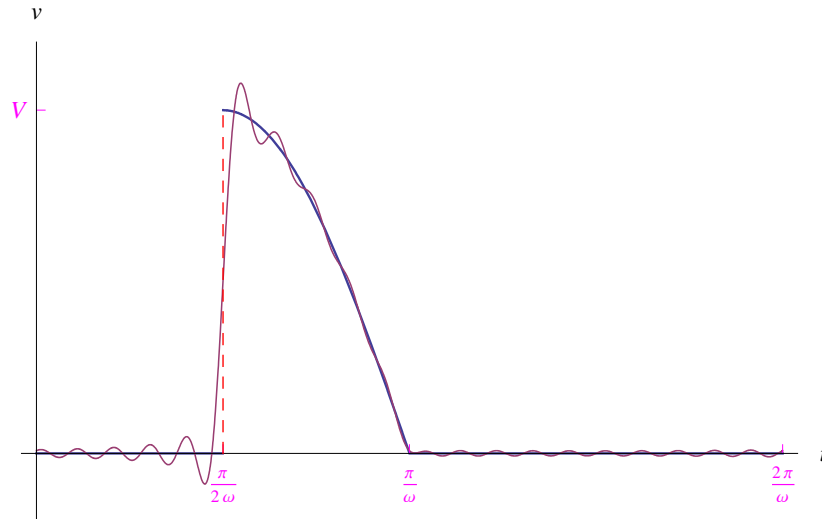


Figura 9: Confronto di $v(t)$ con il suo sviluppo di Fourier troncato al ventesimo ordine.

in serie è più “rozza” nonostante l’ordine relativamente elevato. Più precisamente, osserviamo delle oscillazioni spurie in corrispondenza di $t_1 = \frac{\pi}{2\pi}$. “Forzare” l’approssimazione includendo ulteriori termini nello sviluppo di Fourier, non cancella tali oscillazioni. Ad esempio, $n = 40$ restituisce il grafico di fig. 10. Questo comportamento peculiare è noto in letteratura come *fenomeno di Gibbs* [2].

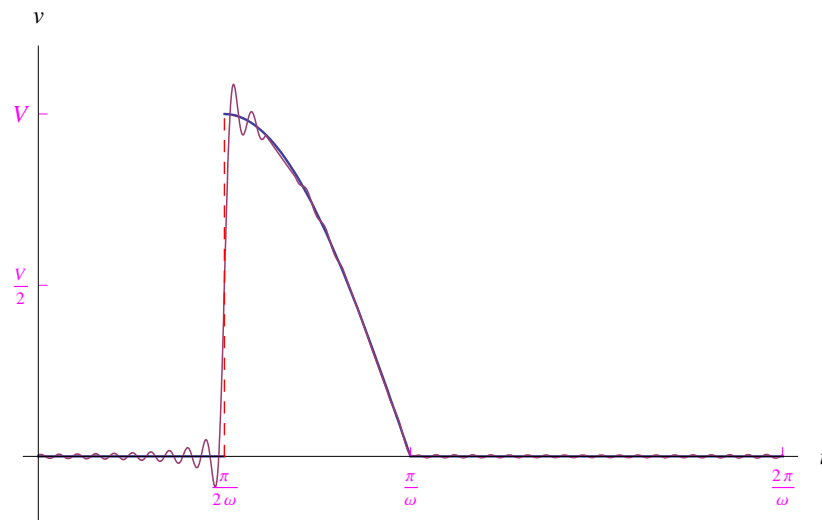


Figura 10: Confronto di $v(t)$ con il suo sviluppo di Fourier troncato al quarantesimo ordine.

Ci sembra naturale attribuire tale comportamento alla presenza della discontinuità. Infatti:

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} v(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_1^+} v(t) = V,$$

per cui la funzione (9) ha nel punto t_1 una discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} v(t) - \lim_{t \rightarrow t_1^-} v(t) = V$$

1.2 Il ruolo svolto dalla derivata prima

Per quanto visto nella sezione precedente, la regolarità della funzione $v(t)$ gioca un ruolo vitale per la convergenza della serie di Fourier. Tuttavia, allo stato attuale delle conoscenze non si conoscono le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza. Sono state peraltro dimostrate alcune condizioni sufficienti a cui deve obbedire $v(t)$, note come *condizioni di Dirichlet*. Ma anche in questo caso esistono interpretazioni differenti. Ad esempio, in [3]–[4] viene enunciato e dimostrato il seguente criterio di convergenza puntuale della serie di Fourier:

Teorema 1 *Se la $f(x)$ periodica di periodo T è generalmente continua e sommabile in $[0, T]$, allora:*

1. *in ogni punto x_0 in cui $f(x)$ sia continua ed in cui esistano tanto la derivata a sinistra quanto la derivata a destra della $f(x)$ (in particolare: in cui la $f(x)$ sia derivabile), la serie di Fourier della $f(x)$ converge ed ha per somma $f(x_0)$;*
2. *in ogni punto x_0 di discontinuità di prima specie in cui esistano tanto la derivata a sinistra quanto la derivata a destra della $f(x)$, la serie di Fourier della $f(x)$ converge ed ha per somma $\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right]$.*

Nel caso 1 rientra lo sviluppo in serie di Fourier della funzione (3). Infatti, $v_{out}(t)$ non è derivabile nei punti $t_k = \frac{k\pi}{\omega}$, ma lo è a destra e a sinistra. Riferiamoci in particolare all'intervallo di periodicità $[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$ (cfr. fig. 11)

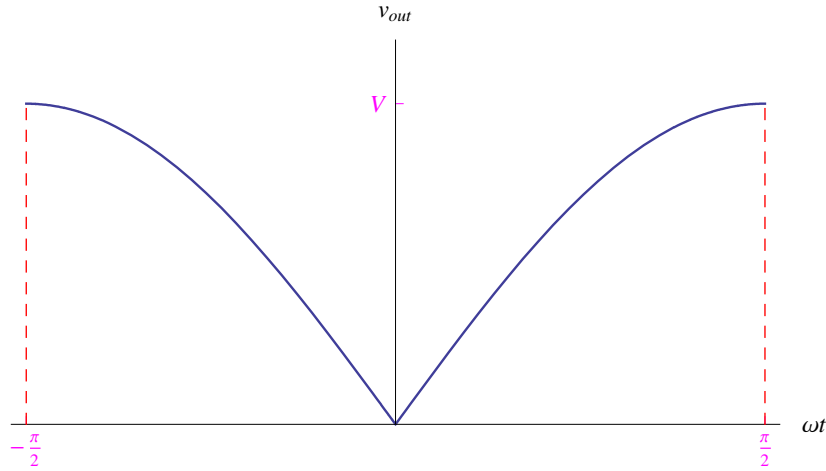


Figura 11: *Andamento della tensione v_{out} in uscita in un raddizzatore ad onda completa per $\omega t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*

Per determinare la derivata della funzione (3) esplicitiamo il valore assoluto nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$:

$$v_{out}(t) = \begin{cases} -V \sin \omega t, & \text{se } -\frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq 0 \\ V \sin \omega t, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega} \end{cases} \quad (11)$$

Derivando:

$$\dot{v}_{out}(t) = \begin{cases} -\omega V \cos \omega t, & \text{se } -\frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq 0 \\ \omega V \cos \omega t, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega} \end{cases} \quad (12)$$

Riesce:

$$\dot{v}_{out}(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \dot{v}_{out}(t) = -\omega V, \quad \dot{v}_{out}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{v}_{out}(t) = \omega V \quad (13)$$

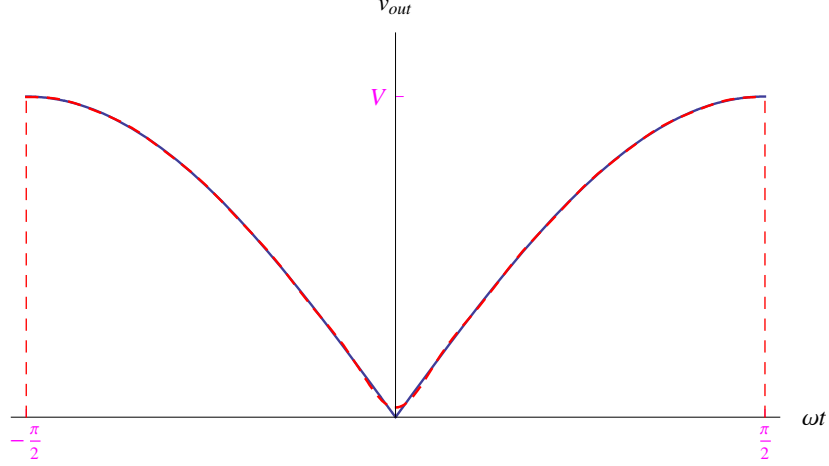


Figura 12: Confronto di $v_{out}(t) = V|\sin \omega t|$ con $\frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{10} \frac{\cos(2k\omega t)}{1-4k^2} \right]$.

Cioè $t = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie per $\dot{v}_{out}(t)$. Nel grafico di fig. 12 vediamo che per $n = 10$ lo sviluppo in serie di Fourier calcolato in $t = 0$ è “abbastanza vicino” al valore esatto $v_{out}(0) = 0$.

È istruttivo graficare l'andamento in funzione di n di

$$\begin{aligned} v_{out}^{(app)}(0) &\stackrel{def}{=} \frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k\omega t)}{1-4k^2} \right]_{t=0} \\ &= \frac{4V}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-4k^2} \right) \\ &\simeq \frac{V}{3n}, \end{aligned} \quad (14)$$

come confermato dal grafico di fig. 13.

Dalla (14) segue immediatamente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{out}^{(app)}(0) = 0$$

Cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{out}^{(app)}(0) = v_{out}(0) \quad (15)$$

L'operazione di passaggio al limite (15) esprime la convergenza della serie di Fourier nel punto $t = 0$ di discontinuità di prima specie per la derivata di $v_{out}(t)$.

Verifichiamo ora, per via computazionale, la seconda parte del teorema 1, riferendoci alla funzione (9). Per quanto visto, il punto $t_1 = \frac{\pi}{2\pi}$ è di discontinuità di prima specie per cui ci aspettiamo una convergenza della corrispondente serie di Fourier a $V/2$. Troncando lo sviluppo (10) a un ordine assegnato n :

$$\begin{aligned} v^{(app)}(t) &= \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \frac{V}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-k^2} \left[k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^{k-1} \right] \cos(k\omega t) \\ &\quad + \frac{V}{4} \sin \omega t - \frac{V}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{k}{1-k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \sin(k\omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

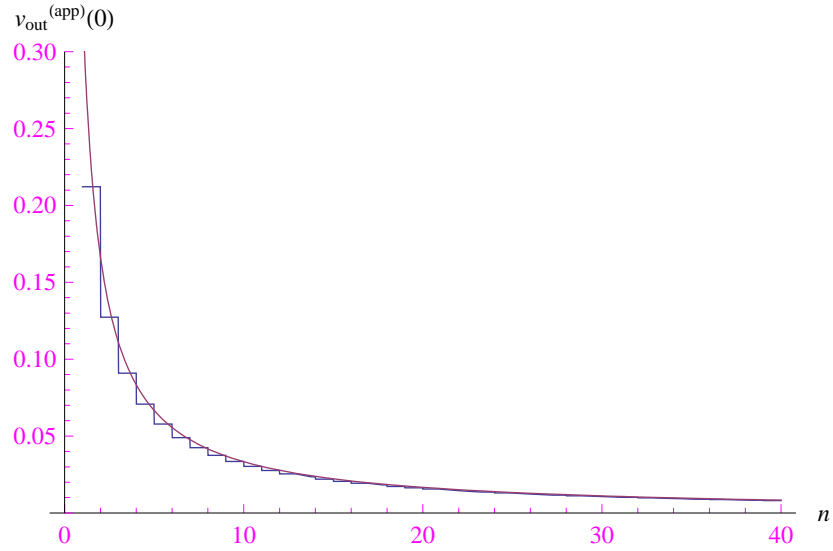


Figura 13: Andamento di $v_{out}^{(app)}(0)$, espressa in unità $V = 1$, in funzione di n . La curva continua è il grafico di $(3n)^{-1}$.

Per $t = t_1$

$$v^{(app)}(t_1) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{4} + \frac{V}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-k^2} \left[k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^{k-1} \right] \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad (17)$$

giacchè:

$$\frac{k}{1-k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{2(1-k^2)} \sin(k\pi) = 0, \quad \forall k$$

Il grafico di (17) in funzione di n è riportato in fig. 14, da cui vediamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v^{(app)}(t_1) = \frac{V}{2},$$

come doveva essere in virtù del teorema 1.

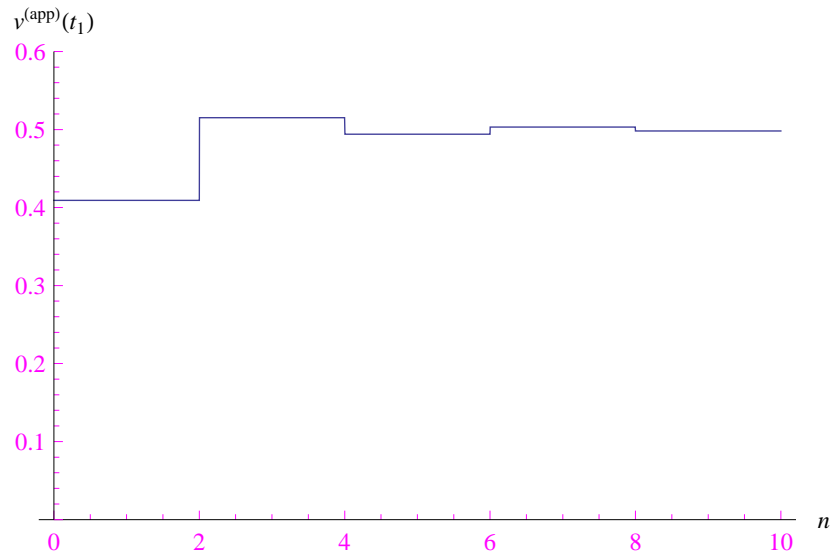


Figura 14: Andamento di $v^{(app)}(t_1)$ (eq. (17)), espressa in unità $V = 1$, in funzione di n .

Per quanto precede, la regolarità della derivata prima sembra essere altrettanto vitale per la convergenza della serie di Fourier. Abbiamo visto che una discontinuità finita della derivata non genera problemi. Esaminiamo ora il caso in cui la derivata ha una singolarità. Sia data la funzione:

$$f(t) = \begin{cases} V(\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi - \omega t}), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ V(\sqrt{\pi} + \sqrt{\omega t - \pi}), & \text{se } \frac{\pi}{\omega} < t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}, \quad (18)$$

quindi il segnale periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$v(t) = f(t) \text{ tale che } v(t + kT) = v(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

Nelle figg. 15–16 riportiamo il grafico di $v(t)$.

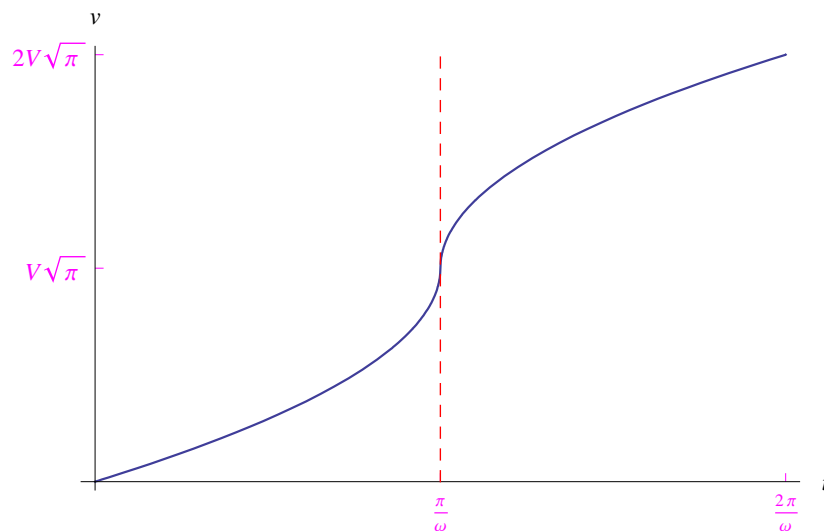


Figura 15: Andamento del segnale (19) nell'intervallo $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$.

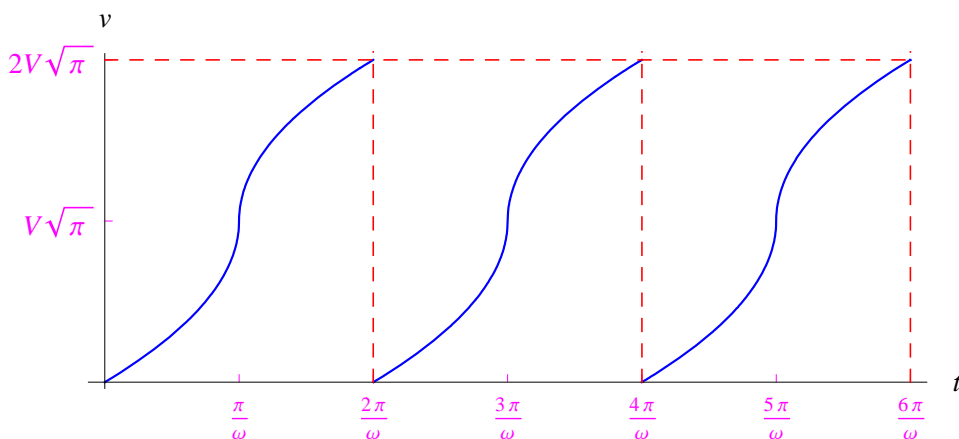


Figura 16: Andamento del segnale (19) nell'intervallo $[0, \frac{6\pi}{\omega}]$.

Nell'intervallo di periodicità $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ la derivata di $v(t)$ è:

$$\dot{v}(t) = \frac{\omega V}{2\sqrt{|\omega t - \pi|}}, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] - \left\{\frac{\pi}{\omega}\right\}$$

Riesce:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{\omega}} \dot{v}(t) = +\infty,$$

onde $P_0\left(\frac{\pi}{\omega}, V\sqrt{\pi}\right)$ è un punto di flesso a tangente verticale per il grafico di $v(t)$, come appunto possiamo vedere dalla fig. 15. Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $v(t)$, i cui calcoli sono riportati in Appendice C, è:

$$v(t) = V \left[\sqrt{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}(-1)^k C(\sqrt{2k}) - 2\sqrt{k}}{k^{3/2}} \sin(k\omega t) \right], \quad (20)$$

dove $C(\sqrt{2k})$ è uno degli *integrali di Fresnel* (cfr. Appendice C):

$$C(\sqrt{2k}) = \int_0^{\sqrt{2k}} \sin\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) d\xi \quad (21)$$

In fig. 17 riportiamo il grafico di $v(t)$ confrontato con lo sviluppo di Fourier (20) troncato al termine $n = 25$. In tale grafico sono visibili le oscillazioni agli estremi generate dalla discontinuità di prima specie (fenomeno di Gibbs). Per esaminare il comportamento in corrispondenza del punto di flesso, grafichiamo in fig. 18 la grandezza:

$$[v(t) - S_n(t)]^2, \quad (22)$$

dove $S_n(t)$ è la somma parziale di ordine n :

$$S_n(t) = V \left[\sqrt{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}(-1)^k C(\sqrt{2k}) - 2\sqrt{k}}{k^{3/2}} \sin(k\omega t) \right]$$

Per $n = 300$ troviamo due massimi simmetrici rispetto alla retta verticale $t = \frac{\pi}{\omega}$.

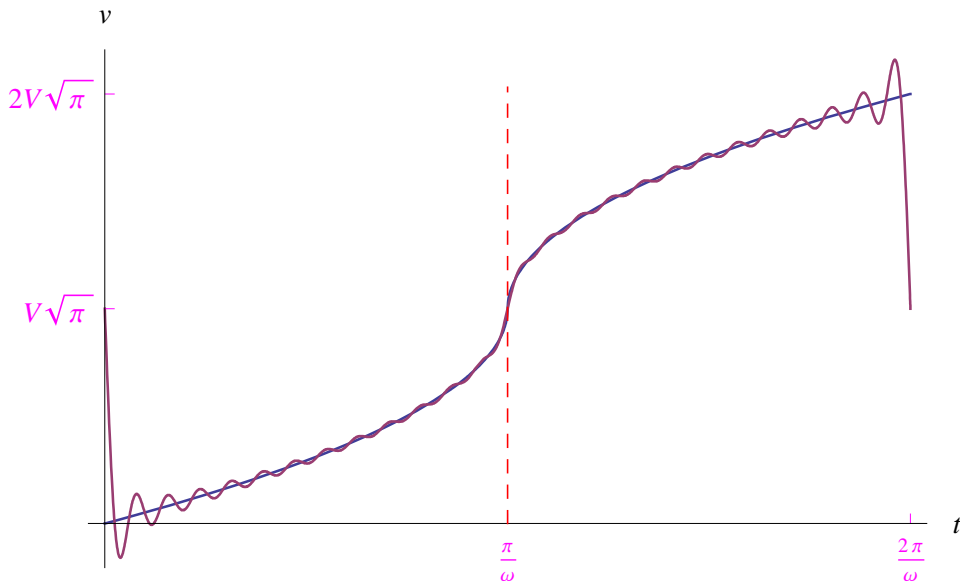


Figura 17: Grafico della funzione $v(t)$ (eq. (19)) confrontato con il suo sviluppo in serie di Fourier troncato al termine $n = 25$.

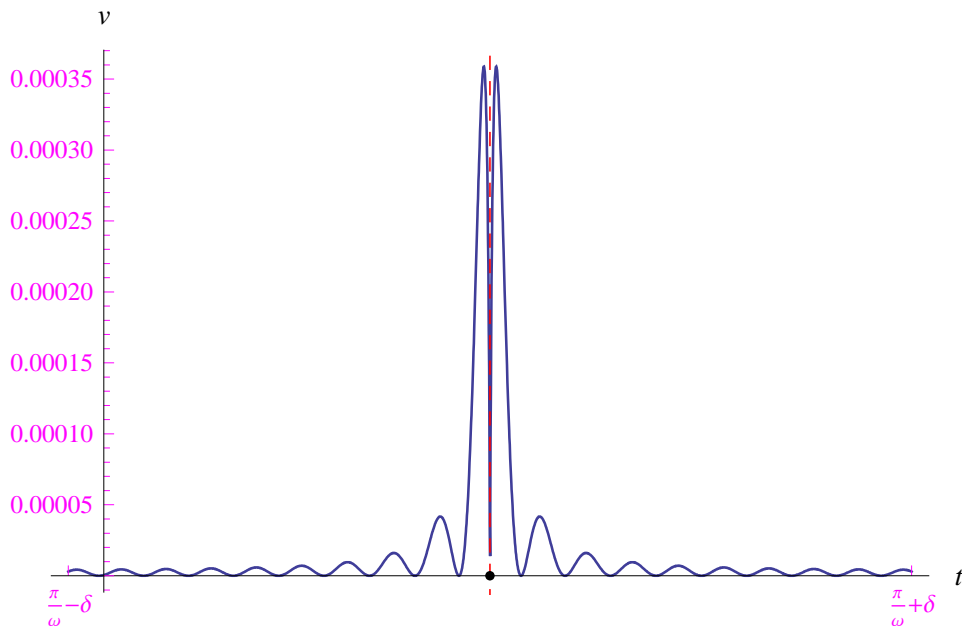


Figura 18: Grafico di $[v(t) - S_{300}(t)]^2$, dove $S_{300}(t) = V\sqrt{\pi} + \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{300} \frac{\sqrt{2}(-1)^k C(\sqrt{2k})^{-2\sqrt{k}}}{k^{3/2}} \sin(k\omega t)$. Il grafico è tracciato in $(\frac{\pi}{\omega} - \delta, \frac{2\pi}{\omega} + \delta)$.

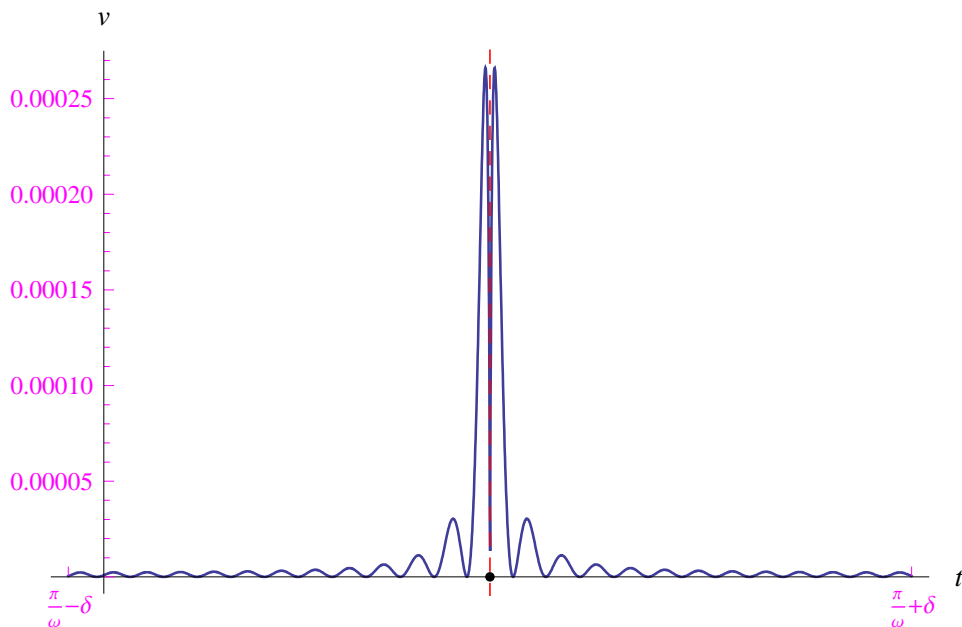


Figura 19: Grafico di $[v(t) - S_{400}(t)]^2$, dove $S_{400}(t) = V\sqrt{\pi} + \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{400} \frac{\sqrt{2}(-1)^k C(\sqrt{2k})^{-2\sqrt{k}}}{k^{3/2}} \sin(k\omega t)$. Il grafico è tracciato in $(\frac{\pi}{\omega} - \delta, \frac{2\pi}{\omega} + \delta)$.

Il valore dei massimi simmetrici rispetto a $t = \frac{\pi}{\omega}$ diminuisce lentamente al crescere di n , per cui potrebbe non annullarsi per $n \rightarrow +\infty$, come possiamo dedurre dalla fig. 19.

In fig. 20 riportiamo il grafico di (22) in un intorno sinistro di $\frac{2\pi}{\omega}$. Il massimo in $t_* = \frac{2\pi}{\omega}$ è dovuto al fenomeno di Gibbs.

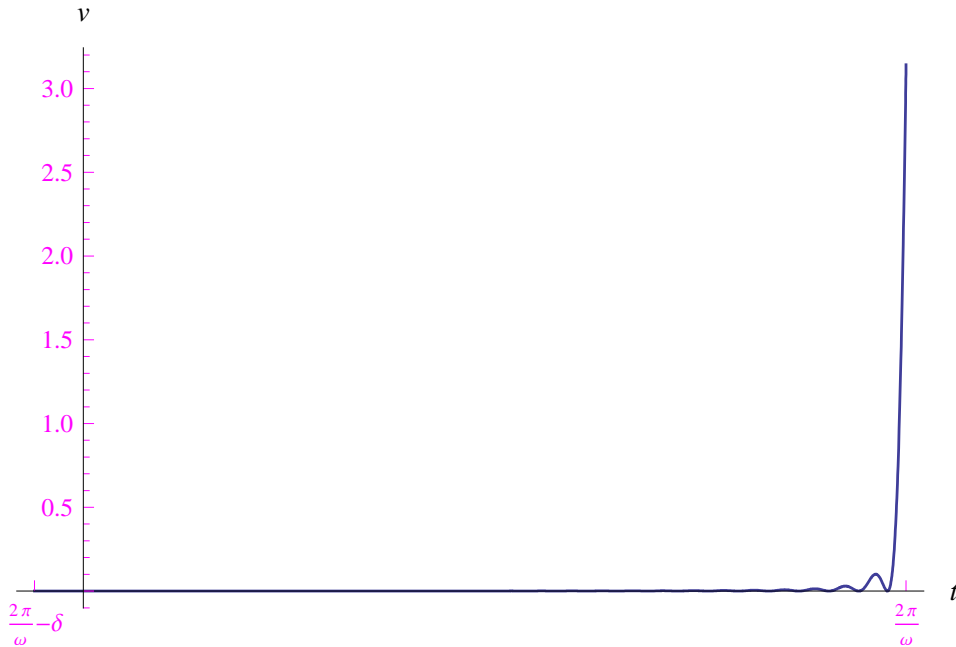


Figura 20: Grafico di $[v(t) - S_{300}(t)]^2$, dove $S_{300}(t) = V\sqrt{\pi} + \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{300} \frac{\sqrt{2}(-1)^k C(\sqrt{2k})^{-2\sqrt{k}}}{k^{3/2}} \sin(k\omega t)$. Il grafico è tracciato in $(\frac{2\pi}{\omega} - \delta, \frac{2\pi}{\omega})$.

La presenza di oscillazioni in corrispondenza di un punto di flesso a tangente verticale – come anche quelle che compongono il fenomeno di Gibbs – potrebbe essere dovuta alla non lipschitzianità della funzione di cui si studia lo sviluppo di Fourier (Appendice D). Incidentalmente, come vedremo più avanti, nel caso di una funzione $f(x)$ con una discontinuità finita in un punto x_0 , la derivata in x_0 può essere definita in senso improprio attraverso la funzione delta di Dirac (Appendice E). Tale definizione impropria è, in realtà, un artificio matematico che consente di quantificare la variazione “istantanea” della funzione in corrispondenza della discontinuità. In parole povere: la derivata di una funzione $f(x)$ con una discontinuità di prima specie in x_0 non è definita in tale punto, però può essere considerata infinita giacché il rapporto incrementale si presenta nella forma $\frac{s(x_0)}{0} \rightarrow \infty$, dove $s(x_0)$ è il salto di discontinuità della funzione. La combinazione lineare di funzioni circolari $\sin kx$, $\cos kx$ che compongono lo sviluppo in serie di Fourier, non riesce ad “inseguire” la variazione istantanea della funzione in corrispondenza di x_0 . Ne consegue che l’unica cosa che può realizzare la serie di Fourier di una funzione con una discontinuità di prima specie, è il fenomeno di Gibbs. Una situazione simile si presenta in corrispondenza di un punto di flesso a tangente verticale.

Per verificare queste asserzioni eseguiamo un esperimento computazionale sulla seguente funzione:

$$v(t) = \begin{cases} V, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0, & \text{se } -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0 \end{cases} \quad (23)$$

È conveniente adimensionalizzare la variabile indipendente eseguendo in \mathbb{R}^1 la trasformazione di coordinate:

$$x = \omega t,$$

per cui la (23) diventa:

$$v(x) = \begin{cases} V, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad (24)$$

Tale funzione presenta una discontinuità di prima specie in $x_0 = 0$, in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = V, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} v(x) = 0, \quad (25)$$

con salto di discontinuità

$$s(0) = V \quad (26)$$

In fig. 21 riportiamo il grafico di $v(x)$.

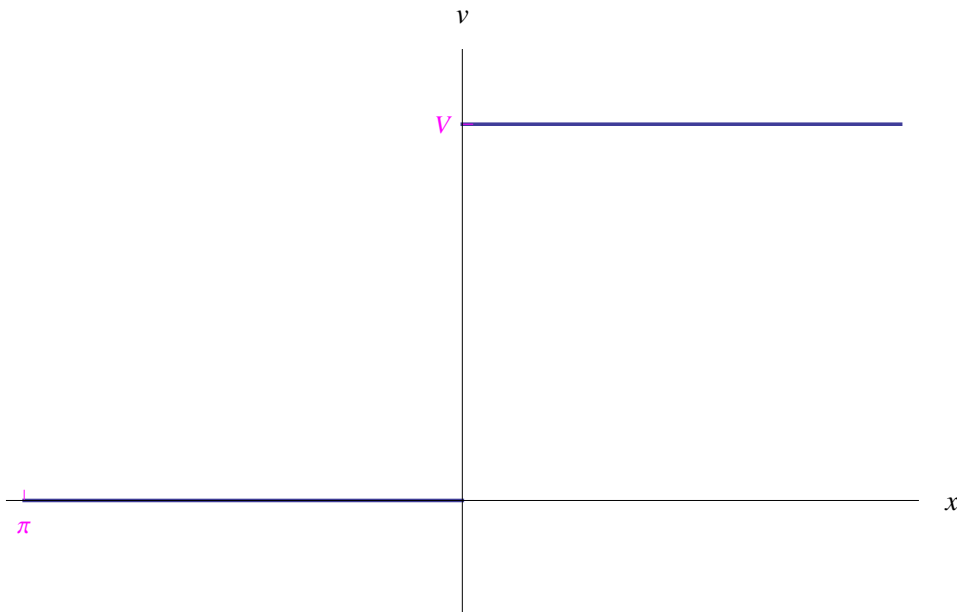


Figura 21: Grafico della funzione (24)

Il rapporto incrementale di $v(x)$ relativo al punto $x_0 = 0$ è:

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = \frac{v(\Delta x) - v(0)}{\Delta x} = \frac{v(\Delta x) - V}{\Delta x} = \begin{cases} 0, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{V}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \quad (27)$$

onde:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = +\infty \quad (28)$$

D'altra parte:

$$v'(x) = 0, \quad \forall x \neq 0$$

Per quanto precede, $v(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$, avendosi dalle (28):

$$v'_+(0) = 0, \quad v'_-(0) = +\infty \quad (29)$$

Le (29) sono intuitivamente ovvie, poichè il salto di discontinuità di $v(x)$ in $x_0 = 0$ è +1 [eq. (26)]. In altri termini, per $\Delta x \rightarrow 0^-$, la funzione “salta” da 0 a V , per cui la derivata sinistra è $+\infty$. Viceversa, per $\Delta x \rightarrow 0^+$ la funzione è costantemente 1, onde la derivata destra è 0. Definiamo ora la funzione:

$$f_\lambda(x) = \frac{V}{e^{-\frac{x}{\lambda}} + 1}, \quad (30)$$

essendo λ un parametro reale positivo. Al variare di λ in $\mathbb{R}_0^+ = (0, +\infty)$, otteniamo la successione di funzioni:

$$\{f_\lambda(x)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_0^+} \quad (31)$$

Le figg. 22–23 confrontano il grafico γ_λ di $f_\lambda(x)$ con quello di $v(x)$, per $\lambda = 1$ e $\lambda = 10^{-1}$ rispettivamente.

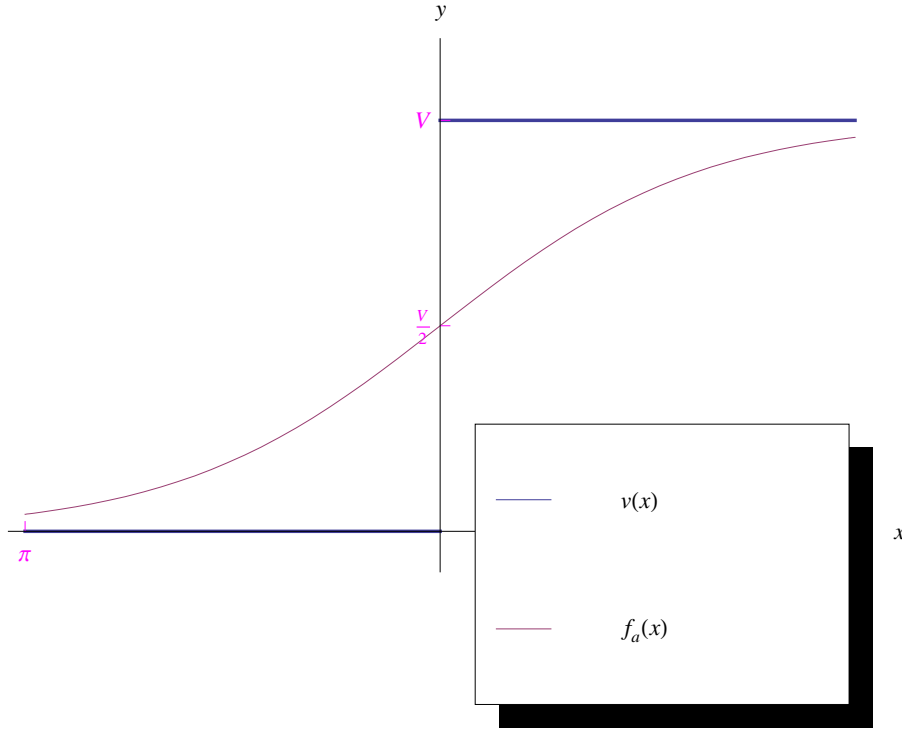


Figura 22: Confronto dei grafici di $v(x)$ e $f_\lambda(x)$ per $\lambda = 1$.

Da tali grafici vediamo che al decrescere progressivo di $\lambda > 0$, il grafico γ_λ “si avvicina” al grafico $\gamma_v : y = v(x)$. Ciò è confermato ulteriormente dalla fig. 24. In altri termini, il parametro λ controlla l’andamento di γ_λ , e per λ “sufficientemente piccolo” riproduce l’andamento a gradino senza perdere la continuità.

Per un assegnato $x \in [-\pi, \pi]$, eseguiamo l’operazione di passaggio al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$, distinguendo i due casi: $x > 0$ e $x < 0$

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{V}{e^{-\frac{|x|}{\lambda}} + 1} \stackrel{\lambda > 0}{=} \frac{V}{e^{-\infty} + 1} = \frac{V}{0^+ + 1} = V^- \\ x < 0 &\implies \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{V}{e^{\frac{|x|}{\lambda}} + 1} = \frac{V}{e^{+\infty} + 1} = \frac{V}{+\infty} = 0^+ \end{aligned} \quad (32)$$

Applicando la definizione di limite, le (32) implicano:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < \lambda < \Delta_\varepsilon &\implies |f_\lambda(x) - V| < \varepsilon, \quad \forall x \in (0, \pi) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta'_\varepsilon > 0 \mid 0 < \lambda < \Delta'_\varepsilon &\implies |f_\lambda(x)| \underset{f_\lambda(x) > 0}{=} f_\lambda(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (-\pi, 0) \end{aligned} \quad (33)$$

A loro volta, le (33) implicano:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \min \{\Delta_\varepsilon, \Delta'_\varepsilon\} \mid 0 < \lambda < \delta_\varepsilon \implies |f_\lambda(x) - v(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in (-\pi, \pi) - \{0\} \quad (34)$$

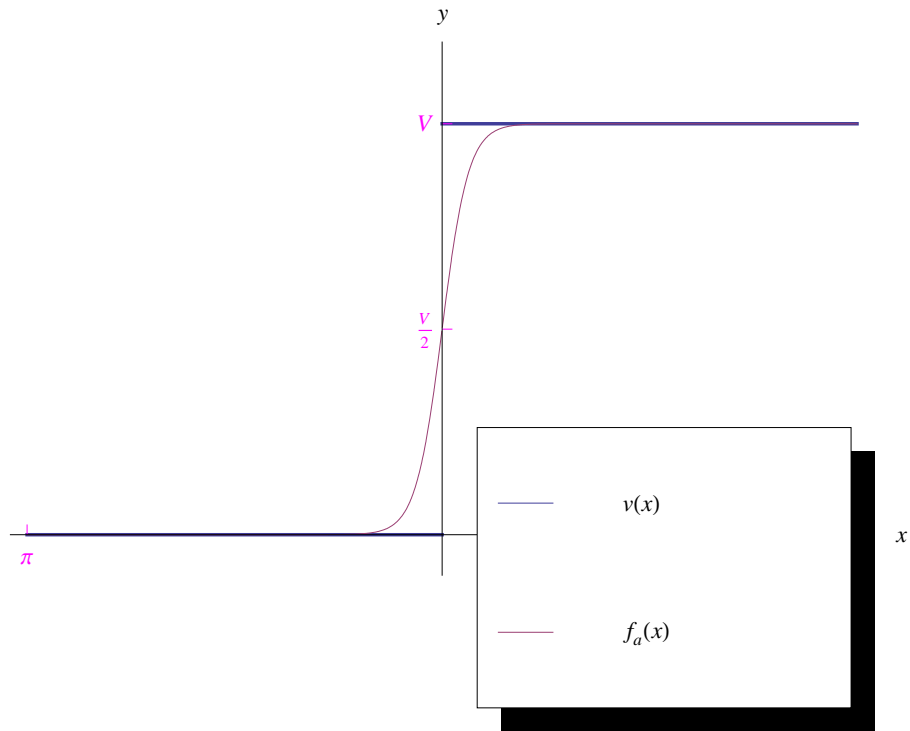


Figura 23: Confronto dei grafici di $v(x)$ e $f_\lambda(x)$ per $\lambda = 10^{-1}$.

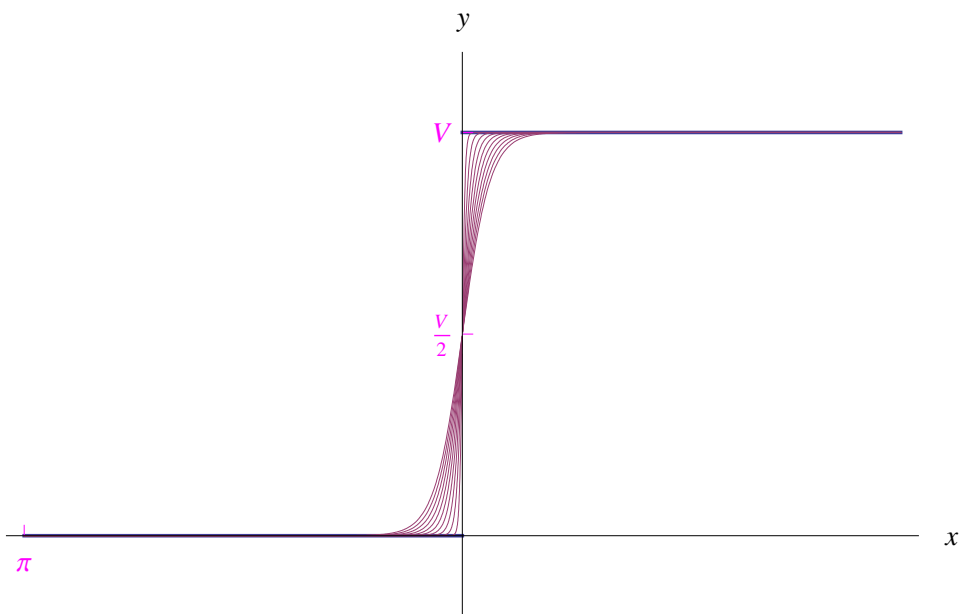


Figura 24: Grafico di $v(x)$ e $f_\lambda(x)$ per λ variabile da 10^{-1} a 10^{-4} con passo 10^{-2} .

Cioè:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = v(x) \quad (35)$$

In altri termini, la successione (31) converge a $v(x)$. Non sappiamo se si tratta di una convergenza puntuale o uniforme. In quest'ultimo caso si avrebbe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = v(x) \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f'_\lambda(x) = v'(x) \quad (36)$$

Ci proponiamo di esplicitare il primo membro del secondo termine dell'implicazione (36) per via grafica, confrontando cioè il grafico $\gamma'_\lambda : y = f'_\lambda(x)$ con $\gamma'_v : y = v'(x)$. Non affronteremo lo studio della derivata:

$$f'_\lambda(x) = \frac{V e^{\frac{x}{\lambda}}}{\lambda (1 + e^{\frac{x}{\lambda}})^2}, \quad (37)$$

ma ci limitiamo a determinarne il comportamento agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_\lambda(x) = \frac{V}{\lambda} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{(1 + e^{-\frac{x}{\lambda}})^2} \stackrel{\lambda > 0}{=} 0^+$$

Alla stessa maniera

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_\lambda(x) = 0^+$$

Cioè $y = 0$ è asintoto orizzontale per γ'_λ a sinistra e a destra. Chiediamo a *Mathematica* di tracciare la curva γ'_λ per valori decrescenti di $\lambda > 0$. Ad esempio, per $\lambda = 1$ otteniamo il grafico di fig. 25.

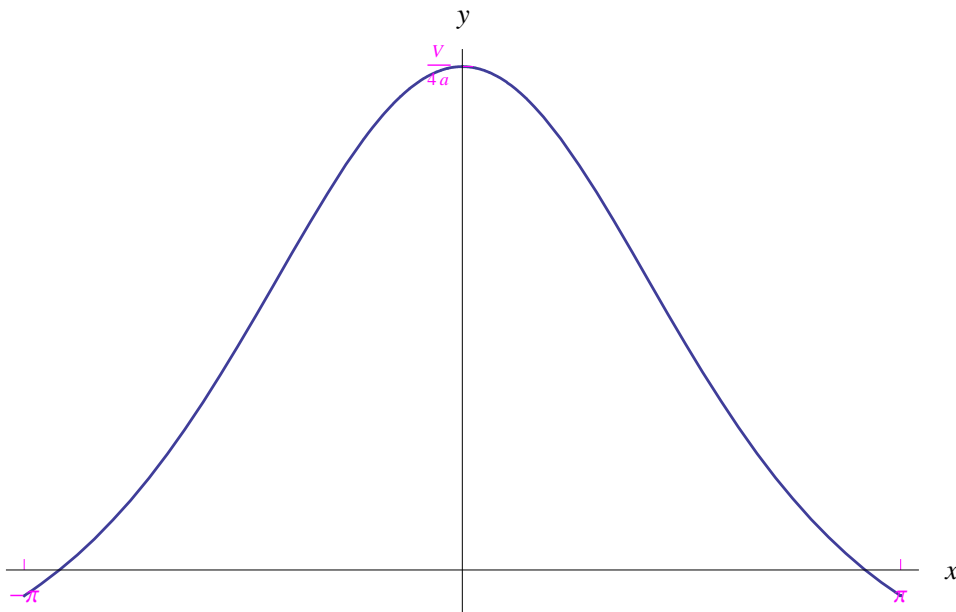


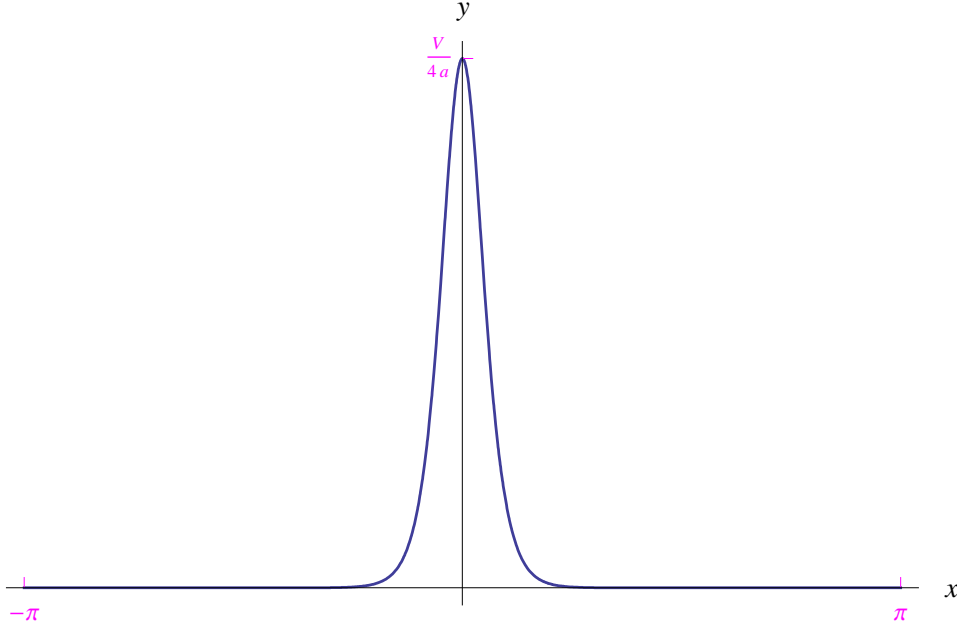
Figura 25: Grafico di $f'_\lambda(x)$ per $\lambda = 1$.

Qui vediamo che $f_\lambda(x)$ ha un punto di massimo assoluto in $x = 0$, risultando

$$f_\lambda(0) = \frac{1}{4\lambda},$$

per cui:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(0) = +\infty$$


 Figura 26: Grafico di $f'_\lambda(x)$ per $\lambda = 10^{-1}$.

Ad esempio, per $\lambda = 10^{-1}$ si ottiene la curva riportata in fig. 26.

Da tale analisi grafica segue:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = V \cdot \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = V\delta(x),$$

dove $\delta(x)$ è la funzione *impulso unitario* (*delta di Dirac*, Appendice E). Ne consegue che

$$\frac{d}{dx}v(x) = V\delta(x), \quad \forall x \in (-\pi, \pi), \quad (38)$$

mentre:

$$\frac{d}{dx}v(x) = V \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi), \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) \quad (39)$$

Assumendo la funzione (24) periodica di periodo $T = 2\pi$, segue che il suo sviluppo in serie di Fourier (Appendice G) è:

$$\begin{aligned} v(x) &= V \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx \right] \\ &= V \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

Nelle figg. 27–28 confrontiamo $v(x)$ con il suo sviluppo di Fourier troncato a $n = 4$ e $n = 20$ rispettivamente.

A questo punto sviluppiamo in serie di Fourier la funzione $f_\lambda(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; i calcoli dei coefficienti di Fourier sono riportati in Appendice H. Nelle figg. 29–30 confrontiamo $f_{\lambda=1}(x)$ con la somma parziale $S_n(x; 1)$ per $n = 4$ e $n = 10$ rispettivamente.

$$S_n(x; \lambda) = \frac{V}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k(\lambda) \cos kx + b_k(\lambda) \sin kx]$$

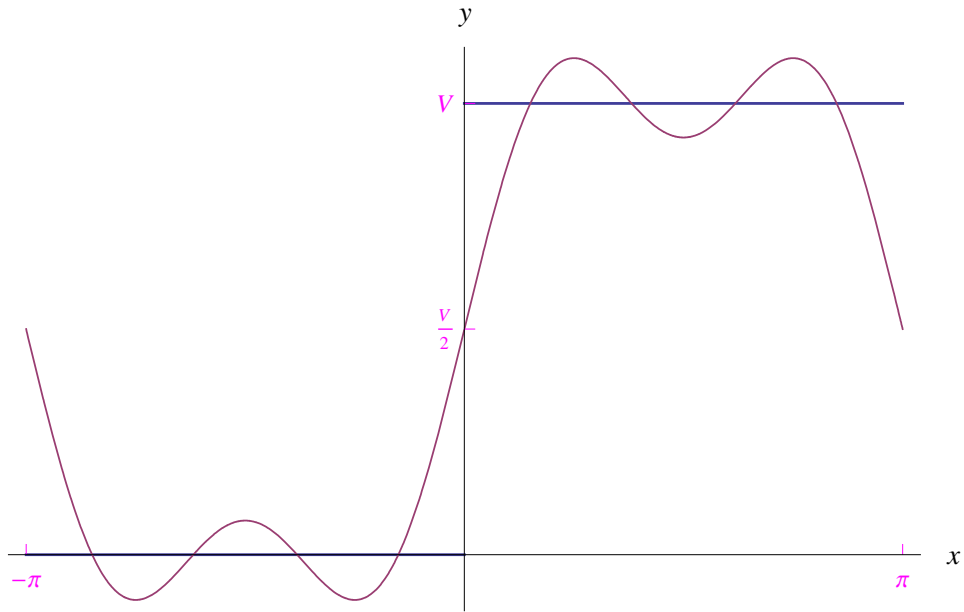


Figura 27: Confronto di $v(x)$ con $V \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx \right]$.

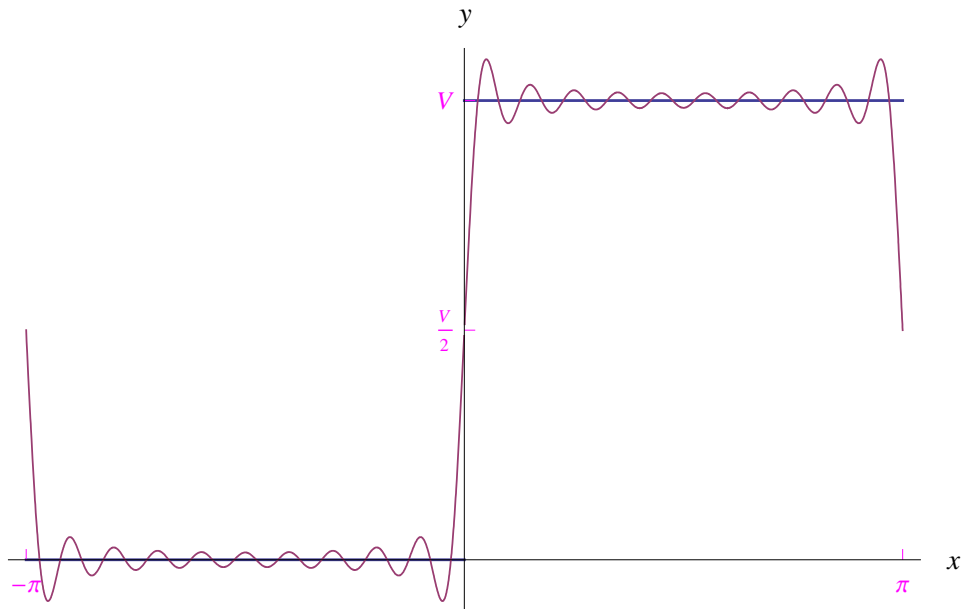


Figura 28: Confronto di $v(x)$ con $V \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{20} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx \right]$.



Figura 29: Confronto di $f_{\lambda=1}(x)$ con $S_4(x; 1)$.

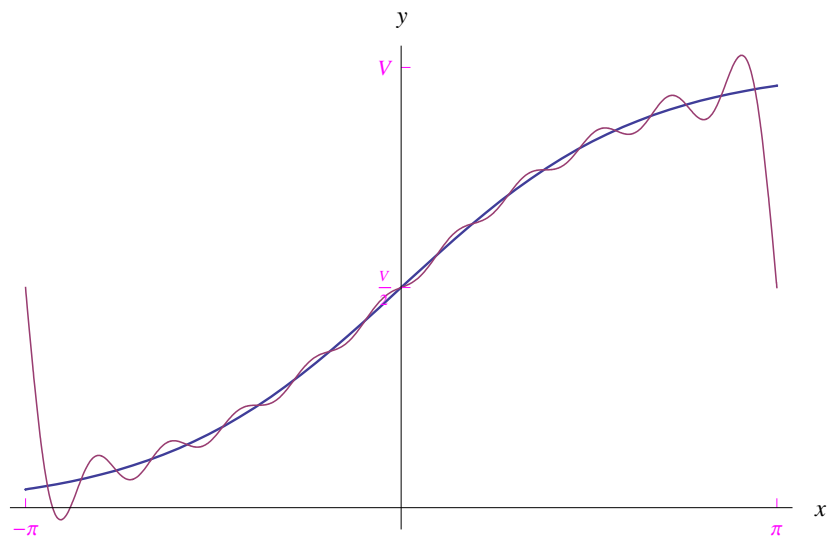


Figura 30: Confronto di $f_{\lambda=1}(x)$ con $S_{10}(x; 1)$.

A parte il fenomeno di Gibbs agli estremi dell'intervallo, vediamo che in $x = 0$ il processo di convergenza è regolare. Ripetendo i calcoli per $\lambda = 10^{-1}$, si ottengono i grafici riportati nelle figg. 31–32–33

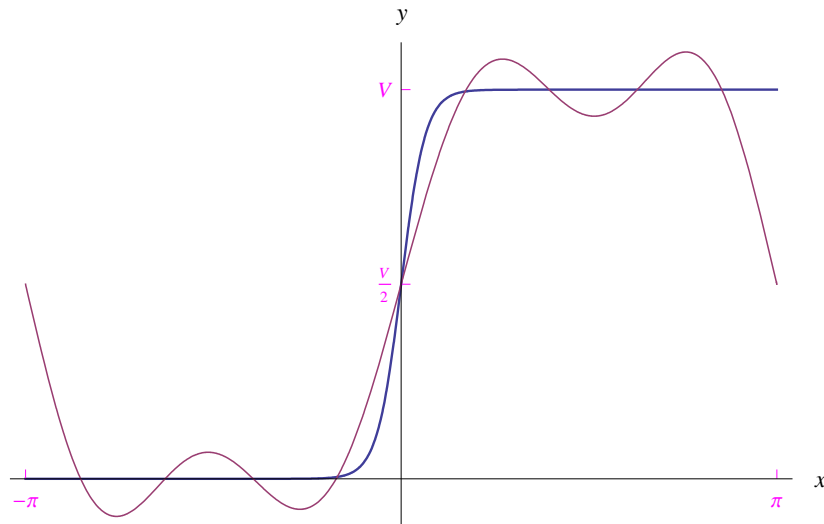


Figura 31: Confronto di $f_{\lambda=10^{-1}}(x)$ con $S_4(x; 10^{-1})$.

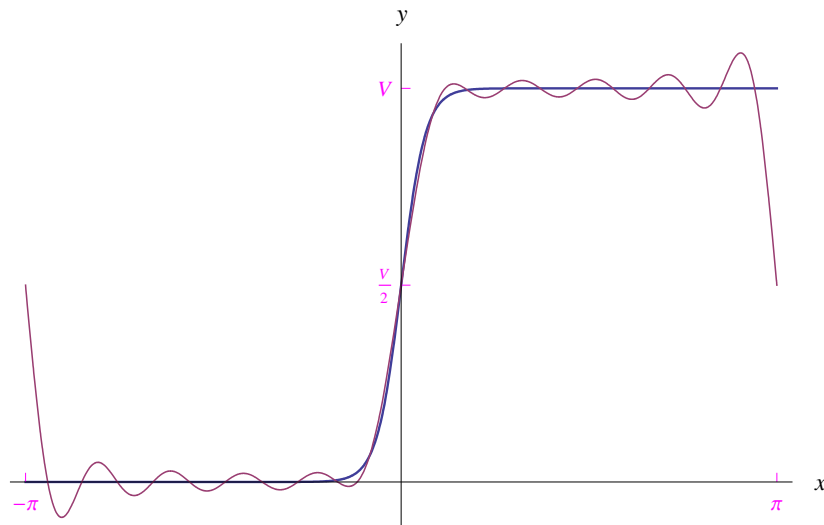


Figura 32: Confronto di $f_{\lambda=10^{-1}}(x)$ con $S_{10}(x; 10^{-1})$.

In particolare, dalla fig 32 si assiste alla comparsa delle oscillazioni che caratterizzano il fenomeno di Gibbs solo in prossimità degli estremi dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e non in $x = 0$. Osserviamo, peraltro, che la funzione $f_\lambda(x)$ è lipchitziana con coefficiente di Lipchitz $\Lambda(f_\lambda) = \lambda^{-1}$. Ne consegue che per $\lambda \rightarrow 0^+$ il coefficiente di Lipschitz è $\Lambda(f_{\lambda=0}) = +\infty$ o ciò che è lo stesso, la funzione perde la sua lipchitzianità, favorendo la comparsa del fenomeno di Gibbs in un intorno di $x = 0$.

Se ora guardiamo il processo di convergenza della serie di Fourier per un'assegnata $f(x)$ periodica di periodo T :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right], \quad \forall x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad (41)$$

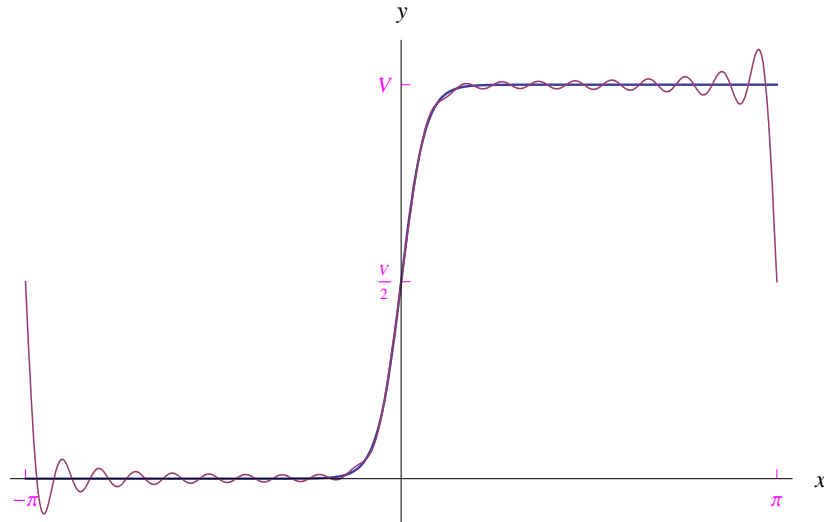


Figura 33: Confronto di $f_{\lambda=10^{-1}}(x)$ con $S_{20}(x; 10^{-1})$.

notiamo che a secondo membro abbiamo una combinazione lineare delle funzioni circolari

$$\sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right), \quad \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \quad (42)$$

che sono manifestamente lipchitziane, onde ci aspettiamo che anche il primo membro lo sia. Diversamente, non si verificherebbe la convergenza. Per essere più precisi, consideriamo la somma parziale di ordine n :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right] \quad (43)$$

Una qualunque funzione costante è lipchitziana con coefficiente di Lipschitz 0, per cui il termine costante a secondo membro della (43) dà contributo nullo al coefficiente di Lipschitz di $S_n(x)$. È facile persuadersi che i termini (42) hanno coefficiente di Lipschitz pari a

$$\frac{2k\pi}{T} \quad (44)$$

Si apre quindi il problema di determinare il coefficiente di Lipschitz della combinazione lineare:

$$\sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right] \quad (45)$$

per un assegnato n . Sfortunatamente non esiste un metodo analitico per determinare il coefficiente di Lipschitz di una funzione. I casi più semplici sono, per quanto visto, quello delle funzioni circolari $\sin kx$, $\cos kx$ e quello delle funzioni lineari. Ad esempio, le funzioni:

$$g_1(x) = a_1x + b_1, \quad g_2(x) = a_2x + b_2, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ con } a_1, a_2 \neq 0,$$

sono lipchitziane con coefficienti di Lipschitz a_1 e a_2 rispettivamente. La somma:

$$g_1(x) + g_2(x),$$

è a sua volta lipchitziana con coefficiente $a_1 + a_2$, mentre la differenza

$$g_1(x) - g_2(x),$$

è lipschitziana con coefficiente $|a_1 - a_2|$. Questi risultati si generalizzano a combinazioni lineari del tipo:

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Supponiamo ora di avere la seguente combinazione lineare di funzioni circolari:

$$F(x) = 2 \sin x - 4 \sin 2x + \cos x + \cos 5x \quad (46)$$

Per definizione di coefficiente di Lipschitz (Appendice D):

$$\left| \frac{F(x') - F(x'')}{x' - x''} \right| \leq \Lambda(F), \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}, \quad (x' \neq x'') \quad (47)$$

Se poniamo $x' = x$ e $x'' = x + \Delta x$, la relazione precedente si scrive:

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} \right| \leq \Lambda(F), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

In altri termini, il rapporto incrementale di F relativo a un qualunque punto $x \in \mathbb{R}$ è limitato in modulo dal coefficiente di Lipschitz. Per stimare l'ordine di grandezza di $\Lambda(F)$ possiamo provare a graficare $\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} \right|$ in funzione di x , per valori Δx "sufficientemente piccoli". Ad esempio, per $\Delta x = 10^{-2}$, otteniamo l'andamento riportato in fig. 34, da cui vediamo che $\Lambda(F) \simeq 14$. Sono bastati, quindi, pochi termini per incrementare rapidamente il coefficiente di Lipschitz. Tuttavia, ci aspettiamo che:

$$\Lambda(S_n) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (48)$$

essendo

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right]$$

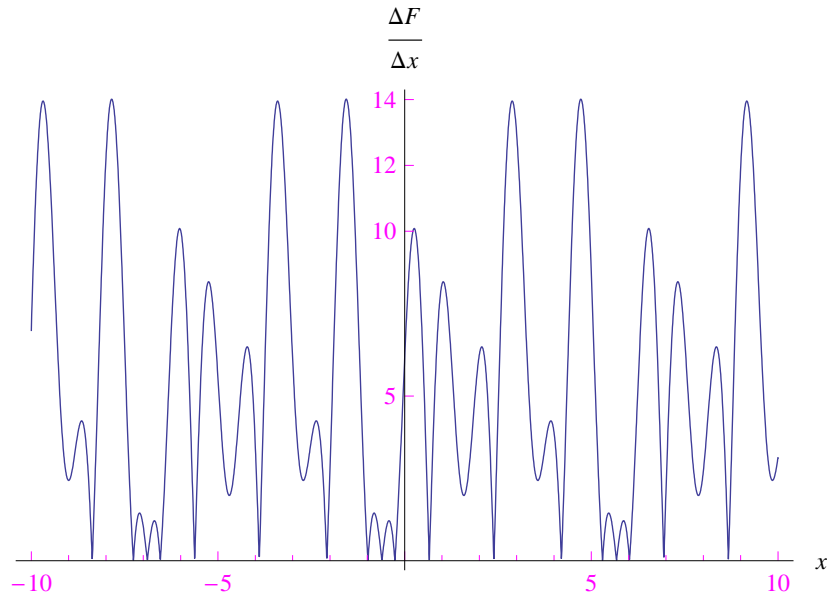


Figura 34: Andamento di $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ per $\Delta x = 10^{-1}$.

Ritornando allo sviluppo in serie (41), un'approssimazione del tipo

$$f(x) \simeq S_n(x),$$

implica:

$$+\infty > \Lambda(f) \simeq \Lambda(S_n) \quad (49)$$

Cioè il numero n di termini della somma $S_n(x)$ è sufficiente per riprodurre la pendenza del grafico di $f(x)$. Diversamente, se per un assegnato n risulta:

$$+\infty > \Lambda(f) > \Lambda(S_n), \quad (50)$$

possiamo provare ad aggiungere altri termini, cercando di ottenere:

$$\Lambda(f) \simeq \Lambda(S_{n'}), \quad n' > n$$

In altre parole, se il coefficiente di Lipschitz della somma parziale $S_n(x)$ è inferiore al coefficiente di Lipschitz della funzione, possiamo aumentare l'ordine di approssimazione in modo da permettere alla somma parziale di "inseguire" la rapida variazione della $f(x)$. Se invece f non è lipchitziana si ha:

$$\Lambda(f) = +\infty > \Lambda(S_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (51)$$

Eseguendo al secondo membro della (51) l'operazione di passaggio al limite per $n \rightarrow +\infty$:

$$+\infty > \lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda(S_n)$$

Ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda(S_n) = \Lambda(S_\infty),$$

dove

$$S_\infty \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Tenendo conto della (48):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Lambda(S_n) < +\infty \implies \Lambda(S_\infty) < +\infty,$$

per cui

$$+\infty > \Lambda(S_\infty) \quad (52)$$

e la serie presenta il fenomeno di Gibbs (discontinuità di prima specie) o una non convergenza in un intorno di un punto di flesso a tangente verticale. Ricapitolando, i casi possibili sono:

1. La derivata della funzione $f(x)$ è definita come funzione con singolarità in x_0 . Ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sqrt{-x}, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}, \quad (53)$$

il cui grafico ha un flesso con tangente verticale nel punto $O(0,0)$. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty \quad (54)$$

Pertanto la (53) non è lipschitziana.

2. La derivata della funzione $f(x)$ non è definita come funzione, bensì come distribuzione. Ad esempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$f'(x) = \delta(x), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Nella serie di Fourier della funzione (53) sopravvivono solo i coefficienti di Fourier b_k :

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{x} \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Per quanto visto in precedenza, le funzioni $\sqrt{x} \sin kx$ non sono elementarmente integrabili in $[0, \pi]$, ma si esprimono tramite gli integrali di Fresnel [cfr. eq. (21)], ottenendo:

$$b_k = \frac{2}{\pi k^{3/2}} \left[-(-1)^k \sqrt{k\pi} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(\sqrt{2k}) \right], \quad k = 1, 2, \dots,$$

con

$$C(\sqrt{2k}) = \int_0^{\sqrt{2k}} \cos\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) d\xi,$$

che è rapidamente oscillante, come mostrato in fig. 35.

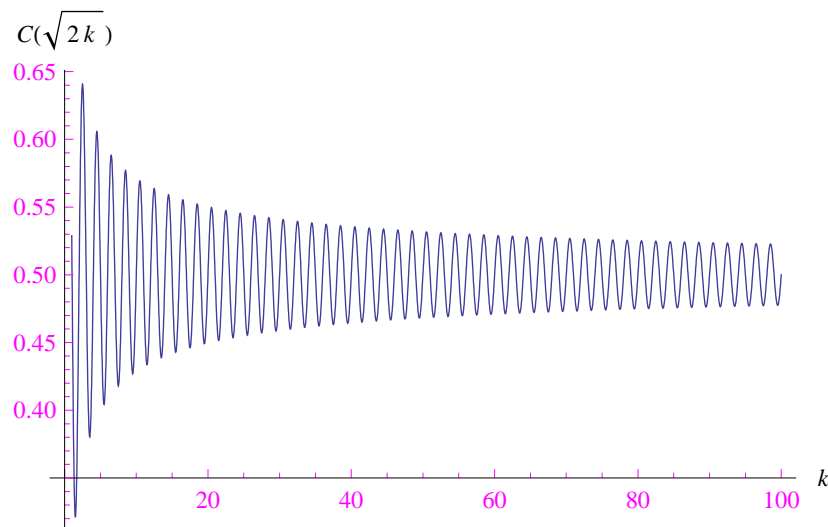


Figura 35: *Andamento di $C(\sqrt{2k})$ assumendo k variabile con continuità.*

Le uniche funzioni non lipschitziane sembrano essere quelle del tipo (53), per cui denotando con \mathcal{F} l'operazione di sviluppo in serie di Fourier, si ha simbolicamente:

$$\sqrt{x} \xrightarrow{\mathcal{F}} C(\sqrt{2k}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Cioè l'algoritmo invoca gli integrali di Fresnel le cui rapide oscillazioni permettono un incremento veloce del coefficiente di Lipschitz delle somme parziali. Ma, per quanto visto [eq. (52)] la serie non converge al valore assunto da $f(x)$ in un intorno del punto in cui la derivata diverge. Tale conclusione è illustrata nel grafico di fig. 36, da cui vediamo che $S_{600}(x)$ non riesce a riprodurre la pendenza $(+\infty)$ di $f(x)$ in un intorno di $x = 0$. Aumentare n non riduce la grandezza $[f(x) - S_n(x)]^2$ nell'intorno medesimo, come possiamo vedere dal grafico di fig. 37.

1.3 Il ruolo svolto dalla monotonia

Anche la monotonia della funzione $f(x)$ gioca un ruolo cruciale per ciò che riguarda la convergenza della serie di Fourier. Ciò non deve sorprendere poichè la monotonia è controllata dalla derivata

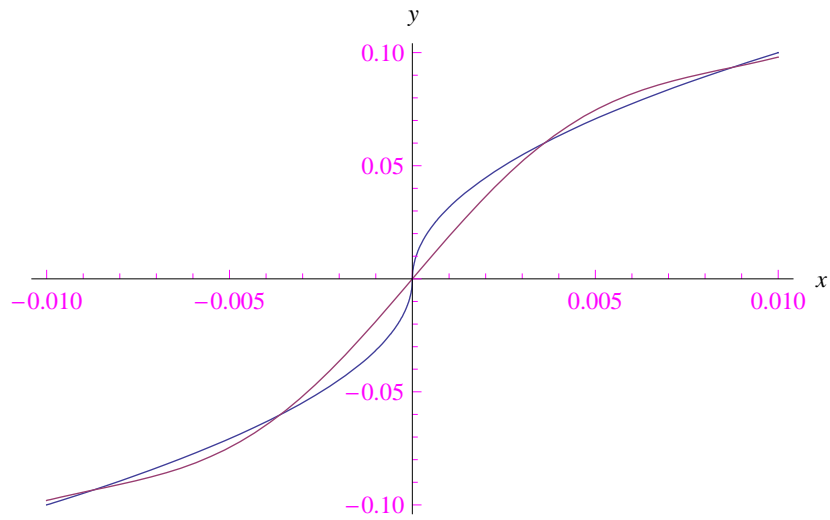


Figura 36: Confronto della funzione con la somma parziale $S_{600}(x)$ della corrispondente serie di Fourier.

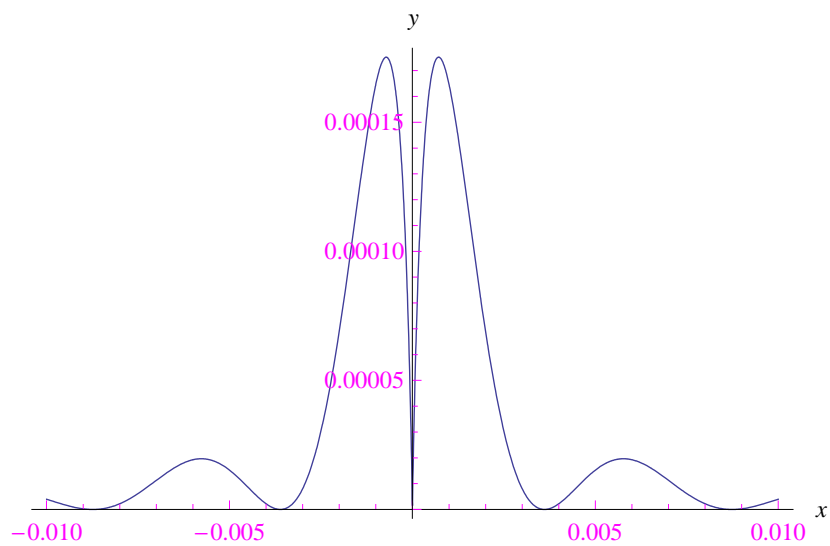


Figura 37: Grafico di $[f(x) - S_{700}(x)]^2$.

prima $f'(x)$. In particolare, ci si riferisce alla cosiddetta *monotonia a tratti* o *monotonia locale*. Per comprendere appieno il significato di tali locuzioni, abbiamo consultato la letteratura al riguardo. Ad esempio, in [5] vengono introdotte le seguenti condizioni sufficienti per la convergenza della serie di Fourier:

Condizione 2 (Condizioni di Dirichlet)

Una funzione soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ se essa è ivi continua o ha un numero finito di discontinuità di prima specie e se, inoltre, il suddetto intervallo può essere suddiviso in un numero finito di parti tali in ciascuna delle quali $f(x)$ varia monotonicamente.

Viene quindi enunciato e dimostrato il teorema:

Teorema 3 (Teorema di Dirichlet)

Se $f(x)$ definita in $(-\pi, \pi)$ soddisfa in questo intervallo le condizioni di Dirichlet, la serie di Fourier di $f(x)$ è convergente in $(-\pi, \pi)$ e la somma della serie:

1. è uguale a $f(x)$ in ogni punto di continuità $x \in (-\pi, \pi)$;

2. è uguale a

$$\frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$$

nei punti di discontinuità;

3. è uguale a

$$\frac{1}{2} [f(-\pi^+) + f(\pi^-)],$$

agli estremi $x = \pm\pi$ dell'intervallo.

Vediamo dunque che in [3]–[4] non viene contemplata la condizione secondo cui l'intervallo di periodicità può essere suddiviso in un numero finito di parti tali in ciascuna delle quali $f(x)$ varia monotonicamente.

In [6] il problema della convergenza della serie di Fourier viene formulato in maniera simile a [5]. Infatti, viene prima data la definizione di *funzione monotona a tratti* in un dato intervallo $[a, b]$, intendendo con tale locuzione la possibilità di suddividere $[a, b]$ in un numero finito di intervalli in cui la funzione è monotona. Subito dopo viene enunciato il teorema di Dirichlet.

In [7] il teorema di Dirichlet è così formulato:

Teorema 4 Si supponga che:

- $f(x)$ sia definita e ad un solo valore, tranne eventualmente in un numero finito di punti in $(-L, L)$.
- $f(x)$ sia periodica di periodo $2L$.
- $f(x)$ ed $f'(x)$ siano generalmente continue in $(-L, L)$

Allora la serie di Fourier di $f(x)$ converge a

- $f(x)$ se x è punto di continuità.
- $\frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$ se x è un punto di discontinuità.

Nel materiale reperibile sul web (appunti e dispense di docenti universitari) vengono enunciati teoremi simili. In [2] le funzioni monotone a tratti [6] sono denominate *funzioni a variazione limitata*.

Noi utilizziamo una locuzione leggermente diversa; più precisamente, ci riferiamo alle cosiddette *funzioni non infinitamente oscillanti al finito*, dandone una caratterizzazione topologica (§ 3.3). Per poter eseguire degli esperimenti computazionali su tali enti matematici, è necessario formalizzare alcune questioni fondamentali. Ciò sarà l'argomento della sezione successiva.

2 Nozioni fondamentali

Sia data una funzione reale di una variabile reale:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (55)$$

essendo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (limitato o illimitato).

Definizione 5 Denotiamo con $C^r([a, b])$ l'insieme delle funzioni reali continue in $[a, b]$ fino alla derivata di ordine r .

Osservazione 6 $C^r([a, b])$ assume la struttura di spazio funzionale, introducendo le leggi di composizione di addizione di elementi di $C^r([a, b])$ e di moltiplicazione di un numero reale per un elemento di $C^r([a, b])$.

Definizione 7 La funzione (55) è **continua a tratti** in $[a, b]$ se in ogni intervallo limitato contenuto in $[a, b]$, cade al più un numero finito di punti di discontinuità di prima specie. Nel caso di punti di discontinuità di seconda specie (o singolarità), diremo che f è **generalmente continua** in $[a, b]$.

Come è noto, la presenza di singolarità in $[a, b]$ pone problemi circa l'esistenza dell'integrale:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Definizione 8 Sia

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (56)$$

una funzione generalmente continua in $[a, b]$.

La funzione (56) è **integrabile** in $[a, b]$ se

$$\exists \int_a^b f(x) dx \quad (57)$$

La funzione (56) è **sommabile** in $[a, b]$ se

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < +\infty \quad (58)$$

In altri termini, l'integrabilità implica l'esistenza dell'integrale di f esteso all'intervallo $[a, b]$, e tale integrale può essere $\pm\infty$. La sommabilità, invece, è una condizione più forte poichè richiede la convergenza dell'integrale.

Esempio 9 Sia data la funzione

$$f(x) = \ln x, \quad \forall x \in (0, 1] \quad (59)$$

Riesce:

$$\int_0^1 \ln x dx = -1,$$

per cui la funzione (59) è sommabile in $[0, 1]$.

Per un noto teorema [3], la sommabilità del modulo di $f(x)$:

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty,$$

è condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di f .

Definizione 10 Denotiamo con $L^r([a, b])$ l'insieme delle funzioni reali $f(x)$ tali che $|f(x)|^r$ è sommabile in $[a, b]$.

Osservazione 11 $L^r([a, b])$ assume la struttura di spazio funzionale, introducendo le leggi di composizione di addizione di elementi di $L^r([a, b])$ e di moltiplicazione di un numero reale per un elemento di $L^r([a, b])$.

Per il citato teorema [3], segue che $f \in L^1([a, b])$ è condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di f in $[a, b]$.

Definizione 12 Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice T -periodica se esiste $T > 0$ tale che

$$f(x + kT) = f(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (60)$$

Il numero reale T si chiama **periodo** della funzione.

Osservazione 13 Dalla (60) segue che

$$T_n \stackrel{\text{def}}{=} nT, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\},$$

è ancora un periodo della funzione. Abbiamo quindi infiniti periodi, e $T = T_{n=1}$ è anche detto **periodo fondamentale**.

3 Serie di Fourier

3.1 Definizioni

Definizione 14 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ T -periodica. La serie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right], \quad (61)$$

si dice **serie di Fourier** associata alla funzione f . I numeri reali a_k, b_k sono dati da:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx, & (k = 0, 1, 2, \dots) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx, & (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (62)$$

e si dicono **coefficienti** o **coordinate di Fourier** della funzione f .

Osservazione 15 L'appartenenza di f a $L^1(\mathbb{R})$ assicura la convergenza degli integrali a secondo membro delle (62).

Sussiste la seguente proposizione per la cui dimostrazione rimandiamo a [8]

Proposizione 16 Per un assegnato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, la $2n$ -pla di coordinate di Fourier:

$$(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

individua univocamente la funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, attraverso le (62).

3.2 Regolarità a tratti

Definizione 17 La funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **regolare a tratti** se esiste una decomposizione $\mathcal{D}(x_0, x_1, \dots, x_N)$ di $[a, b]$:

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \\ [a, b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [x_k, x_{k+1}] \\ [x_k, x_{k+1}] \cap [x_{k'}, x_{k'+1}] = \emptyset, \quad \forall k \neq k' \end{cases}$$

tale che:

1. I punti x_1, \dots, x_{N-1} sono di discontinuità di prima specie.
2. In x_0 e x_N la funzione è derivabile.
3. I punti $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_{N-1}, f(x_{N-1}))$ sono al più punti angolosi per il grafico della funzione.

Osservazione 18 La condizione 3 implica che la funzione pur non essendo derivabile in x_1, \dots, x_{N-1} , lo è a sinistra e a destra nei rispettivi punti.

Osservazione 19 La regolarità a tratti è una condizione più forte della continuità a tratti, giacchè è richiesta la derivabilità della funzione a sinistra e a destra in ciascun punto di discontinuità di prima specie.

Esempio 20 La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + x + \frac{1}{2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad (63)$$

è regolare a tratti. Infatti, è continua negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, mentre in $x = 1$ presenta una discontinuità di prima specie:

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{5}{2},$$

ed è ivi derivabile a destra e a sinistra, avendosi:

$$f'_-(1) = 0, \quad f'_+(1) = 3$$

Il grafico è riportato in fig. 38.

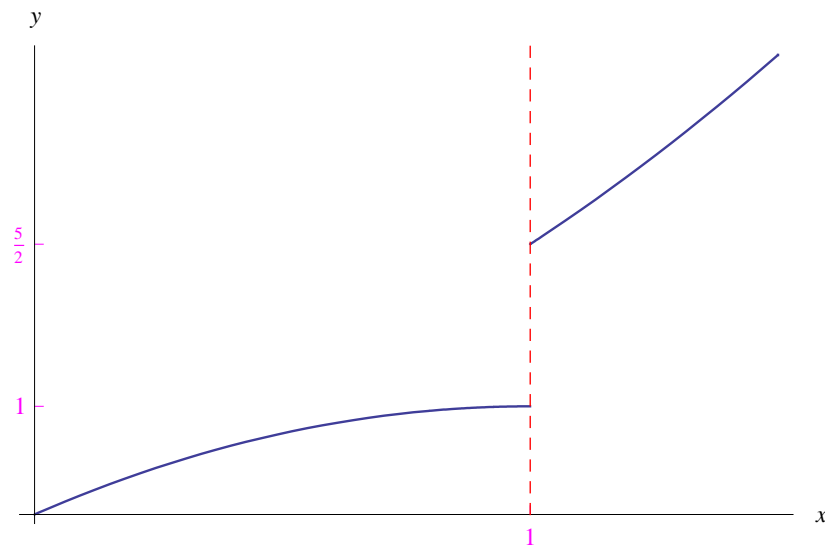


Figura 38: Regolarità a tratti della funzione (63).

Esempio 21 La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2 + \sqrt{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad (64)$$

è continua a tratti, ma non è regolare a tratti. Infatti, è continua negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, mentre in $x = 1$ presenta una discontinuità di prima specie:

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

È ivi derivabile a sinistra, avendosi:

$$f'_-(1) = 0,$$

ma non a destra, giacché ha ivi derivata infinita:

$$f'_+(1) = +\infty$$

Il grafico è riportato in fig. 64.

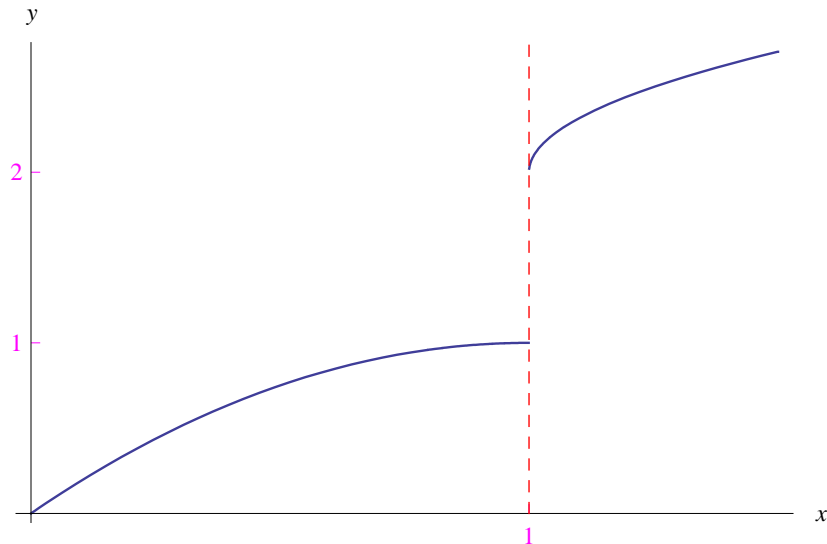


Figura 39: Grafico della funzione (64). Tale funzione è continua a tratti, ma non è regolare a tratti, giacché ha derivata infinita a destra in $x = 1$.

Esempio 22 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2 + (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{se } x > 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (65)$$

Riesce

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1,$$

mentre:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 2 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{=0} \\ &= 2, \end{aligned}$$

cioè la funzione è continua a destra in $x = 1$. Per quanto visto nell'esempio precedente, è derivabile a sinistra in $x = 1$, ma non lo è a destra. Per verificare tale asserzione, scriviamo il rapporto incrementale relativo a f e di punto iniziale $x = 1$, per incrementi $\Delta x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \frac{2 + \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 2}{\Delta x} \\ &= \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right), \end{aligned}$$

ed è non regolare per $\Delta x \rightarrow 0$, giacché

$$\nexists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right),$$

come risulta da [questa dispensa](#). Il grafico è riportato in fig. 40, mentre in fig. 41 è lo stesso grafico è zoomato in un intorno destro di $x = 1$.

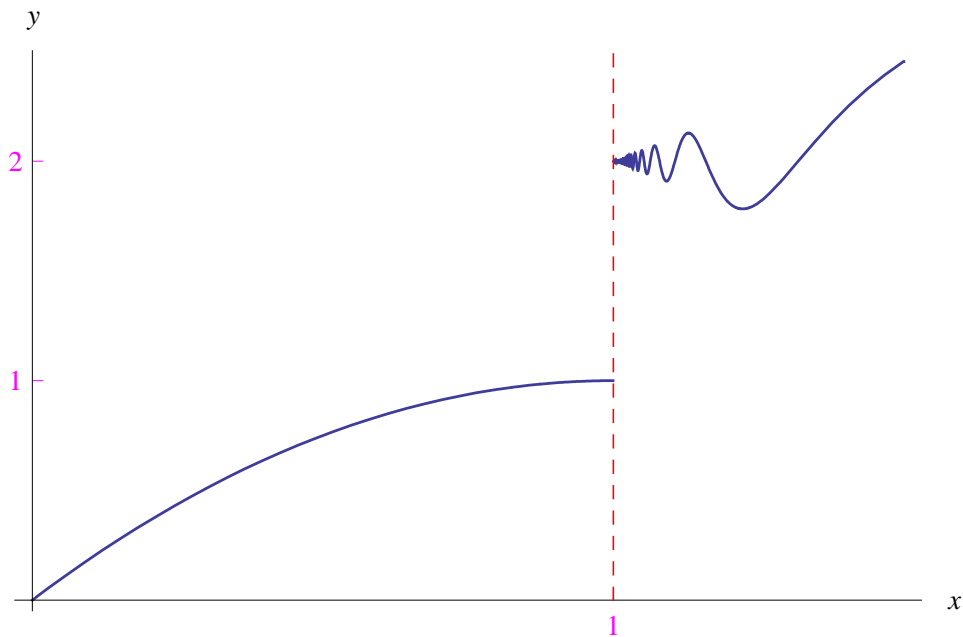


Figura 40: Grafico della funzione (65). La funzione non è derivabile a destra in $x = 1$. In ogni intorno destro di tale punto, il grafico compie infinite oscillazioni e la retta secante non tende a nessuna posizione limite per $x \rightarrow 1^+$, giacchè oscilla tra le semirette $y = x + 1$ e $y = -x + 3$.

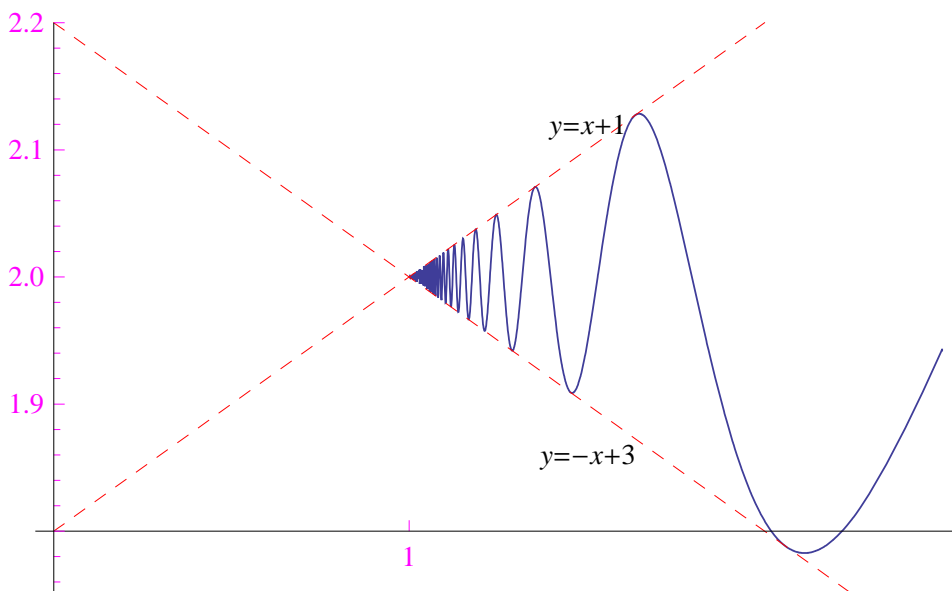


Figura 41: Grafico della funzione (65) in un intorno destro di $x = 1$. La funzione non è derivabile a destra di $x = 1$. In ogni intorno destro di tale punto, il grafico compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 1^+$ e la retta secante non tende ad alcuna posizione limite, ma oscilla tra le rette tratteggiate.

L'esempio precedente è suggestivo, in quanto mostra una funzione che compie infinite oscillazioni in ogni intorno destro di $x = 1$. Tuttavia, il numero infinito di oscillazioni non deve trarre in inganno, nel senso che non è condizione sufficiente per la non derivabilità, come mostra quest'altro esempio:

Esempio 23 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2 + (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{se } x > 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (66)$$

Riesce

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1,$$

mentre:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 2 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{=0} \\ &= 2, \end{aligned}$$

cioè la funzione è continua a destra in $x = 1$. Studiamo ora la derivabilità in $x = 1$. A sinistra di tale punto, è immediata:

$$f'_-(1) = 0$$

Il rapporto incrementale relativo a f e di punto iniziale $x = 1$, per incrementi $\Delta x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \frac{2 + (\Delta x)^2 \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 2}{\Delta x} \\ &= \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

Dal momento che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$$

si ha che la funzione è derivabile a destra di $x = 1$ e ha ivi derivata nulla:

$$f'_+(1) = 0$$

Tuttavia applicando le regole di derivazione, otteniamo:

$$f'(x) = 2(x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad \forall x > 1,$$

che è manifestamente non regolare per $x \rightarrow 1^+$. Per un **noto teorema** non possiamo tentare di calcolare la derivata in $x = 1^+$ eseguendo l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x),$$

ma calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale, come abbiamo fatto in precedenza. Quindi la derivata è:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) - \cos\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1^+ \end{cases} \quad (67)$$

Ne concludiamo che la funzione è derivabile a sinistra di $x = 1$, ma la derivata ha ivi una discontinuità di seconda specie. Il grafico è riportato in fig. 42, mentre in fig. 43 lo stesso grafico è zoomato in un intorno destro di $x = 1$.

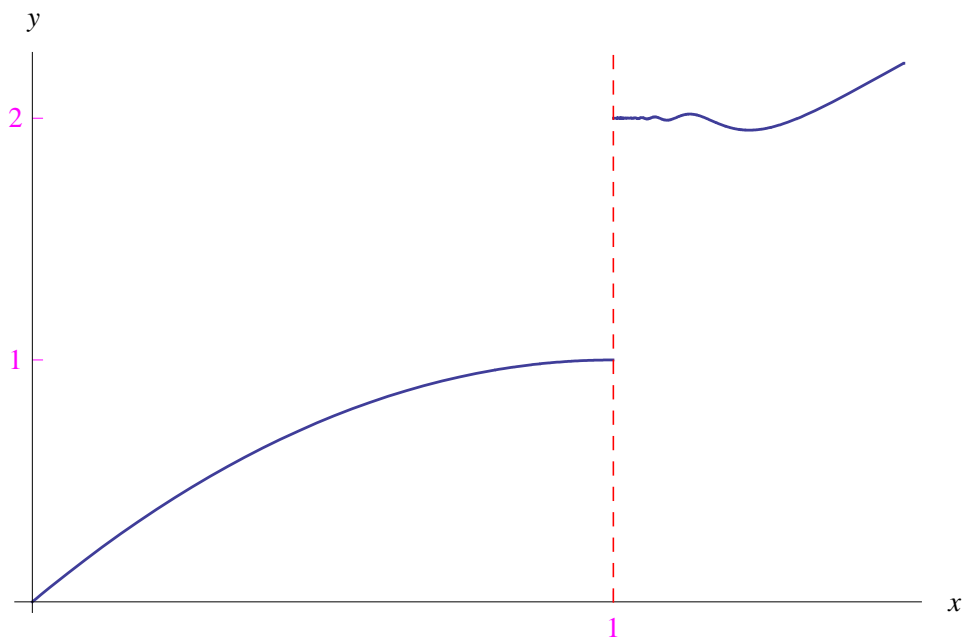


Figura 42: Grafico della funzione (66).

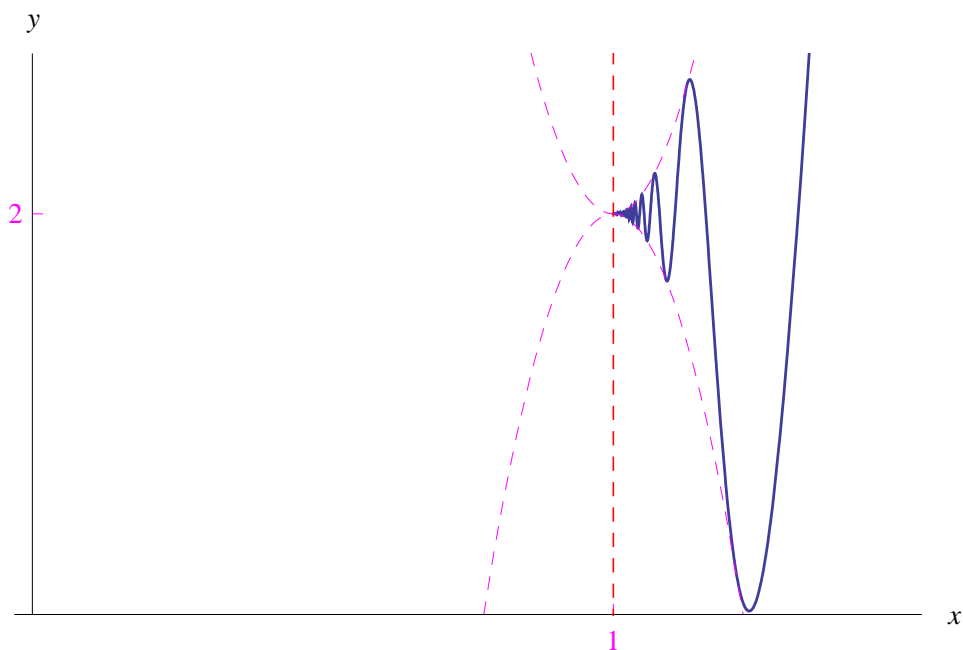


Figura 43: Grafico della funzione (66) in un intorno destro di $x = 1$. La funzione è derivabile a destra di $x = 1$. In ogni intorno destro di tale punto, il grafico compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 1^+$ e la retta secante tende, alla retta $y = 2$, giacchè il grafico oscilla tra le parabole $y = x^2 - 2x + 3$ e $y = -x^2 + 2x + 1$ (curve tratteggiate).

3.3 Funzioni infinitamente oscillanti al finito

L'esempio 23 si generalizza a una funzione del tipo:

$$f(x) = \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \quad (68)$$

dove $\phi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è il cosiddetto *involuppo di modulazione*. Riesce:

$$|f(x)| = |\phi(x)| \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right|}_{\leq 1} \leq |\phi(x)|,$$

da cui

$$-\phi(x) \leq f(x) \leq \phi(x), \quad (69)$$

cioè il grafico di $f(x)$ oscilla tra le curve $\gamma_{\pm} : y = \pm\phi(x)$. Se poi la funzione $\phi(x)$ è infinitesima in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0,$$

per il **teorema dei carabinieri** si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad (70)$$

Per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies \left| \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right| < \varepsilon$$

In altri termini, la funzione (68) compie, in ogni intorno di x_0 , infinite oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow x_0$. La funzione $\sin\frac{1}{x-x_0}$ è non regolare in x_0 , giacchè comunque prendiamo un intorno di x_0 di ampiezza sufficientemente piccola, $\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ compie infinite oscillazioni tra -1 e $+1$. Per contro, qualunque involuppo di modulazione $\phi(x)$ infinitesimo in x_0 , *smorza* le oscillazioni forzando la convergenza di $\phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ a zero.

Dalla (70) segue che la funzione è prolungabile per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases} \quad (71)$$

Assumendo $\phi(x)$ derivabile:

$$f'(x) = \phi'(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^2} \cos\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \quad (72)$$

La regolarità della derivata di (71) dipende ovviamente dalla funzione $\phi(x)$. Sussiste la seguente definizione:

Proposizione 24

$$\left. \begin{array}{l} \text{La funzione (71)} \\ \text{è derivabile in } x_0 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \phi(x) \text{ è derivabile in } x_0 \\ \text{e } \phi'(x_0) = 0 \end{array} \right)$$

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare l'implicazione inversa e procedendo per assurdo:

$$\phi'(x_0) = \lambda_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Denotiamo con $s(P_0, P)$ la retta secante a $\gamma : y = f(x)$ per i punti $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Dalla (69) segue che per $\Delta x \rightarrow 0$ i.e. per $P \rightarrow P_0$, $s(P_0, P)$ oscilla tra le rette tangenti a $\gamma_+ : y = \phi(x)$ e $\gamma_- : y = -\phi(x)$ rispettivamente:

$$\tau_+ : y = y_0 + \lambda_0(x - x_0)$$

$$\tau_- : y = y_0 - \lambda_0(x - x_0)$$

Abbiamo:

$$\lambda_0 \neq 0 \implies \tau_+ \neq \tau_- \implies \nexists \lim_{P \rightarrow P_0} s(P, P_0),$$

per cui il grafico di f è privo di retta tangente in P_0 , cioè f non è derivabile in x_0 . Ma ciò è contro l'ipotesi, onde l'asserto. ■

Il processo di smorzamento delle oscillazioni rientra in un noto teorema sulle funzioni continue, il cui enunciato richiede la seguente definizione:

Definizione 25 Assegnata la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, il numero reale non negativo:

$$\Omega(f, X) = \sup_X f - \inf_X f, \quad (73)$$

si dice **oscillazione della funzione**. Nella (73) $\sup_X f$ e $\inf_X f$ denotano rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in X . È facile mostrare che:

$$\Omega(f, X) = \sup_{x', x'' \in X} |f(x') - f(x'')|$$

Sussiste il seguente teorema, la cui dimostrazione è riportata in [questa dispensa](#).

Teorema 26

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right) \iff \forall I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = 0,$$

dove $\Omega(f, X \cap I_\delta(x_0))$ è l'oscillazione della funzione in $X \cap I_\delta(x_0)$.

Da tale teorema segue che in un intorno di un punto di continuità, l'oscillazione di f deve necessariamente annullarsi. Ciò continua a valere anche per la convergenza, a patto di definire poi la funzione in quel punto attraverso il valore del limite.

Prima di enunciare la seguente definizione, rammentiamo che assegnato $X \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme (eventualmente vuoto) dei suoi punti di accumulazione al finito, si dice *derivato di X* e si indica con $D(X)$.

Definizione 27

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ è } \mathbf{infinitamente oscillante al finito} \iff \exists x_0 \in D(X) \cap D(\mathcal{M}_f),$$

essendo \mathcal{M}_f l'insieme dei punti di estremo relativo di f :

$$\mathcal{M}_f = \{x \in X \mid x \text{ è punto di estremo relativo per } f\}$$

Ne consegue che in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di estremo relativo per f .

Dalla definizione 27 segue che le funzioni:

$$\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \quad \cos\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$$

sono infinitamente oscillanti al finito, incluse quelle modulate in ampiezza:

$$\phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \quad \phi(x) \cos\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$$

Inoltre, la definizione 27 fornisce una caratterizzazione topologica per ciò che riguarda il comportamento di una funzione che compie infinite oscillazioni in ogni intorno di un punto assegnato. Si osservi che le funzioni circolari $\sin x$ e $\cos x$ sono infinitamente oscillanti in ogni intorno di $+\infty$ o di $-\infty$. Incidentalmente, le funzioni $\sin \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ si ottengono con la trasformazione di coordinate in \mathbb{R}^1 :

$$x = \frac{1}{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\},$$

che *trasforma* il punto all'infinito nella coordinata x , nel punto zero nella coordinata t .

Esempio 28 Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(20x) \sin\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{5}}\right), & x \neq \frac{\pi}{5} \\ 0, & x = \frac{\pi}{5} \end{cases} \quad (74)$$

Per quanto precede, riesce:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{5}} f(x) = 0,$$

da cui la continuità di f in $x_0 = \frac{\pi}{5}$. Inoltre:

$$\left. \frac{d}{dx} \sin(20x) \right|_{x=\frac{\pi}{5}} = 20 \cos(20x)|_{x=\frac{\pi}{5}} = 20 \neq 0$$

Quindi per la proposizione ?? la funzione (74) non è derivabile in $\frac{\pi}{5}$. In fig. 44 riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $[0, 1]$.

Esempio 29 Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(20x) \sin\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{5}}\right), & x \neq \frac{\pi}{5} \\ 0, & x = \frac{\pi}{5} \end{cases} \quad (75)$$

Per quanto precede, riesce:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{5}} f(x) = 0,$$

da cui la continuità di f in $x_0 = \frac{\pi}{5}$. Inoltre:

$$\left. \frac{d}{dx} \sin^2(20x) \right|_{x=\frac{\pi}{5}} = 20 \sin(40x)|_{x=\frac{\pi}{5}} = 0$$

Quindi per la proposizione ?? la funzione (75) è derivabile in $\frac{\pi}{5}$, avendosi $f'(\frac{\pi}{5}) = 0$. In fig. 45 riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $[0, \frac{3\pi}{10}]$.

Osserviamo infine che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} (x-x_0)^p \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & \text{se } x \neq x_0 \\ 0, & \text{se } x = x_0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{N} - \{0\},$$

è infinitamente oscillante, e riesce derivabile in x_0 se e solo se $p \geq 2$.

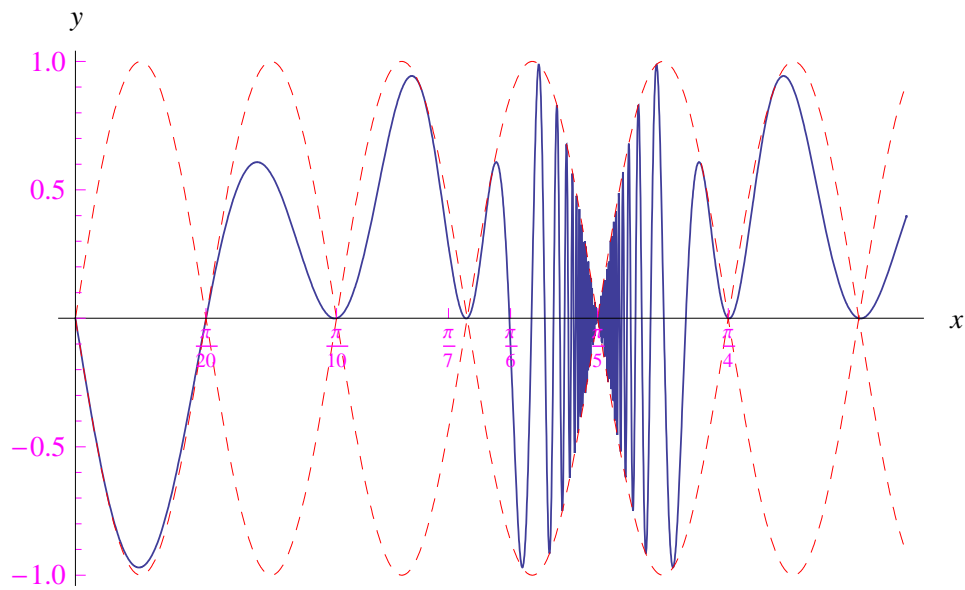


Figura 44: Grafico della funzione (74). La funzione è continua in $x_0 = \frac{\pi}{5}$, ma non è ivi derivabile.

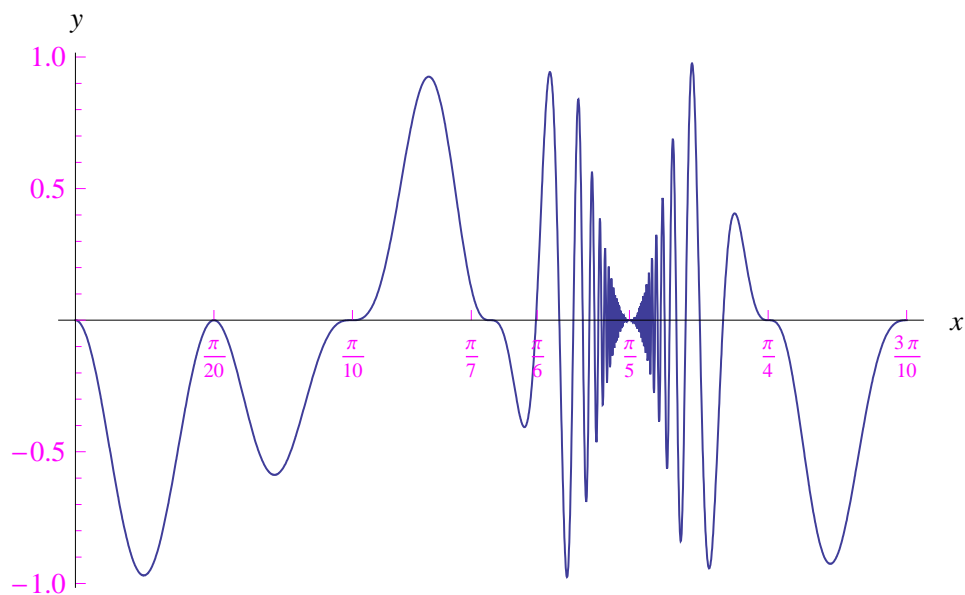


Figura 45: Grafico della funzione (75). La funzione è continua in $x_0 = \frac{\pi}{5}$ ed è ivi derivabile.

3.4 Classe di funzioni infinitamente oscillanti e derivabili

Sia data la funzione infinitamente oscillante al finito:

$$g_p(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad \text{dove } p \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad (76)$$

Il rapporto incrementale è:

$$\frac{\Delta g_p}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^p \sin \left(\frac{1}{x + \Delta x} \right) - x^p \sin \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

In $x_0 = 0$

$$\left(\frac{\Delta g_p}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = (\Delta x)^{p-1} \sin \left(\frac{1}{\Delta x} \right)$$

Riesce:

$$\begin{aligned} g'_p(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta g_p}{\Delta x} \right)_{x_0=0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{p-1} \sin \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Si noti che allo stesso risultato si giunge applicando la proposizione 24, giacchè la funzione reale di esponente intero x^p ha derivata nulla in $x = 0$. Derivando $x^p \sin \frac{1}{x}$ otteniamo:

$$g'_p(x) = px^{p-1} \sin \left(\frac{1}{x} \right) - x^{p-2} \cos \left(\frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0$$

Per quanto precede:

$$g'_p(x) = \begin{cases} px^{p-1} \sin \left(\frac{1}{x} \right) - x^{p-2} \cos \left(\frac{1}{x} \right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (77)$$

Per $p = 2$

$$g_2(x) \stackrel{def}{=} g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (78)$$

è derivabile in \mathbb{R} . Il suo grafico è riportato in fig. 46.

4 Sviluppo in serie di Fourier di una funzione infinitamente oscillante

Assegnata la funzione $g(x)$ [eq. (78)], assumiamo:

$$f(x) = g(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (79)$$

dopodichè poniamo:

$$f(x + 2k\pi) = f(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (80)$$

da cui la periodicità di f con periodo $T = 2\pi$. In Appendice I sono eseguiti i calcoli dei coefficienti di Fourier della funzione (79)

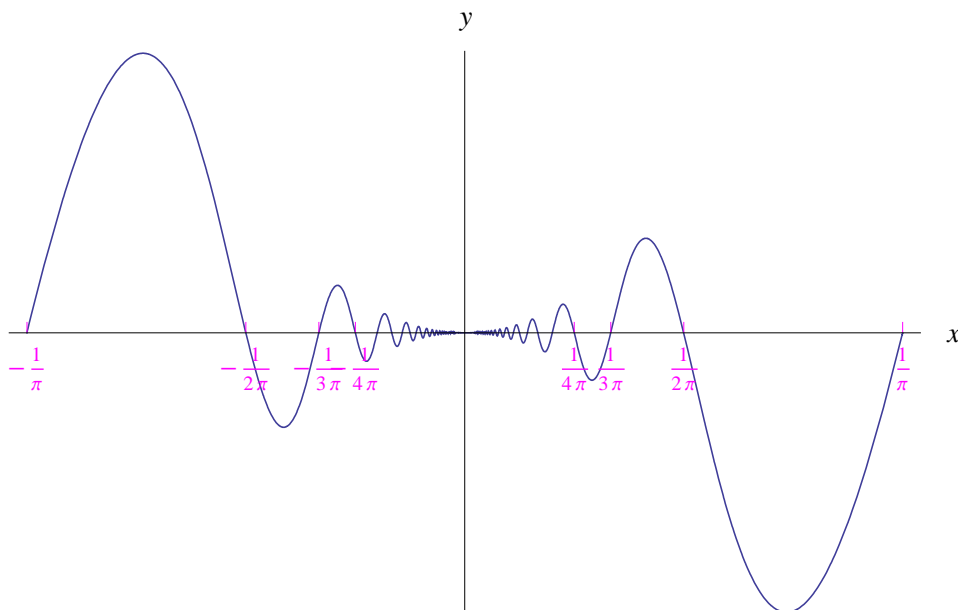


Figura 46: Grafico della funzione (78), che risulta continua in \mathbb{R} incluso il punto $x_0 = 0$ ed è ivi derivabile, avendosi $g'(0) = 0$.

Cioè la funzione è periodica di periodo 2π , la cui serie di Fourier è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx,$$

con

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Tali integrali vanno calcolati numericamente. In tal modo possiamo ricostruire in software le varie somme parziali:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx$$

In fig. (47) confrontiamo la funzione $f(x)$ con $S_n(x)$ per $n = 10, 20, 40, 50$.

Per analizzare l'andamento della convergenza in un intorno di $x = 0$ zoomiamo il grafico ottenendo la fig. 48, da cui vediamo che la serie non converge a $f(x)$ in un intorno di $x = 0$. Aumentando l'ordine di approssimazione, la convergenza non viene raggiunta, come possiamo osservare dal grafico di fig. 49.

Il comportamento non regolare della convergenza della serie di Fourier della funzione (79) in un intorno di $x = 0$, non deve sorprenderci giacchè se ci poniamo la seguente domanda:

$$x^2 \sin \frac{1}{x} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx, \tag{81}$$

la risposta più ovvia è:

$$\exists \delta > 0 \mid x^2 \sin \frac{1}{x} \neq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx, \quad \forall x \in (-\delta, \delta) - \{0\},$$

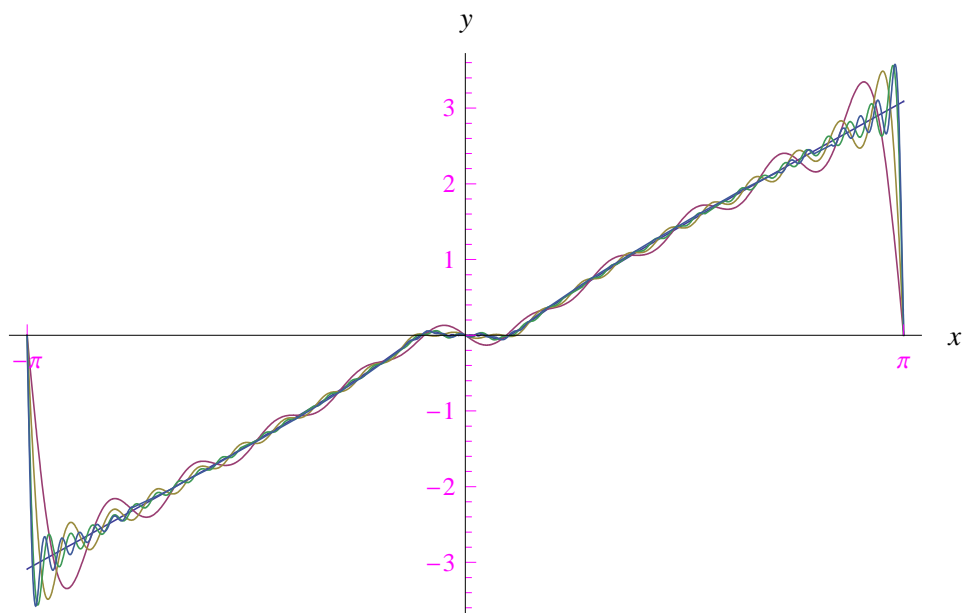


Figura 47: Grafico della funzione (79) confrontato con le somme parziali $S_{10}(x)$, $S_{20}(x)$, $S_{40}(x)$, $S_{50}(x)$. Le oscillazioni agli estremi sono dovute alla discontinuità finita in $x = \pm\pi$.

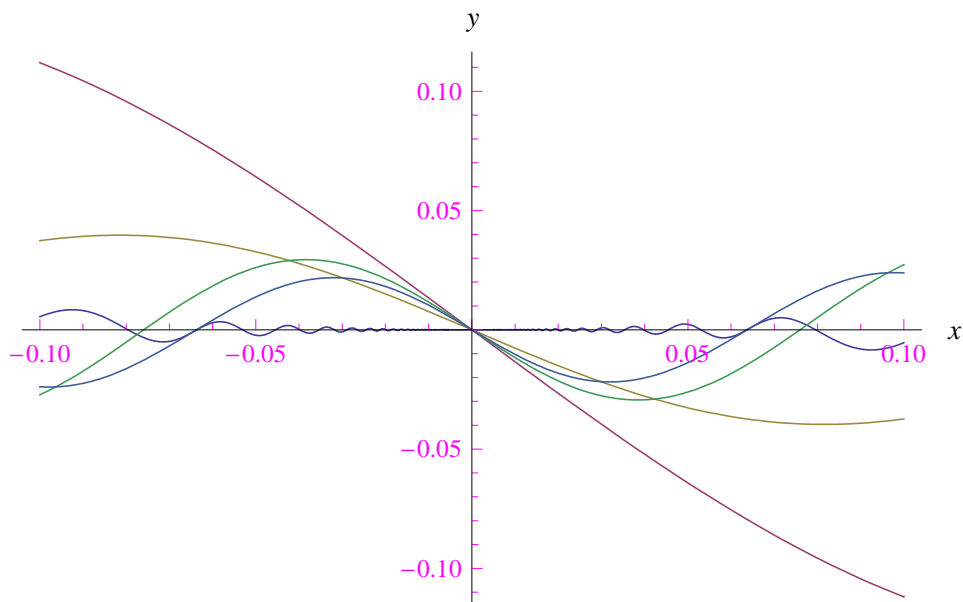


Figura 48: In questo grafico riportiamo il diagramma della funzione (79) confrontato con quello della somma parziale di ordine 10 del suo sviluppo di Fourier.

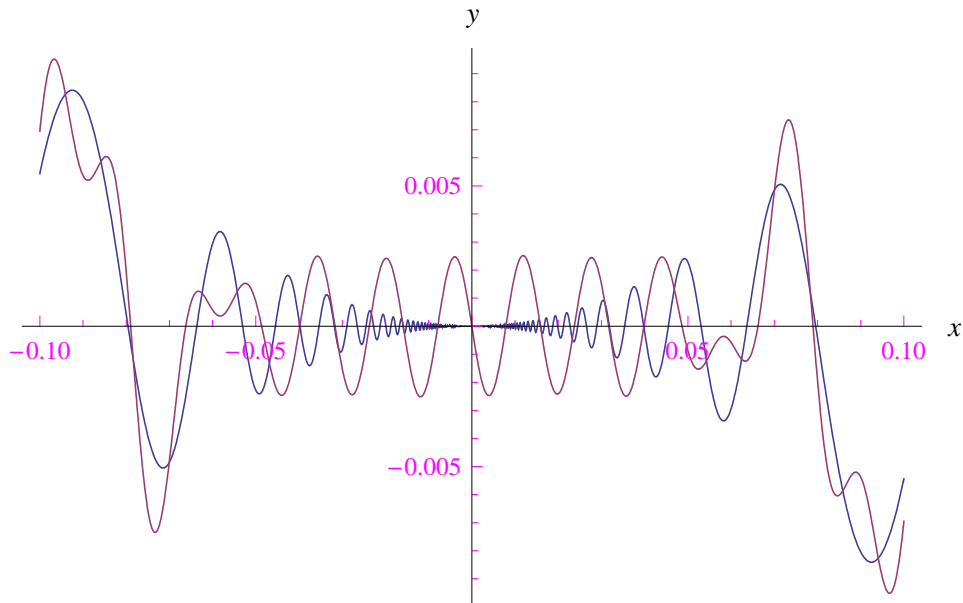


Figura 49: Confronto della funzione (79) con la somma parziale di ordine 400 del suo sviluppo di Fourier.

dove abbiamo escluso $x = 0$ in quanto in tale punto la convergenza in $x = 0$ è assicurata dalla parità (-1) delle funzioni ad ambo i membri della (81). In altri termini, la combinazione lineare di $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin kx, \dots$ non riesce a ricostruire le infinite oscillazioni della funzione a primo membro.

A Sviluppo in serie di Fourier della funzione (3)

La funzione (3) è pari per cui applichiamo la (??)

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right),$$

con

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Cioè:

$$a_k = \frac{4\omega V}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin \omega t \cos(2k\pi t) dt$$

Eseguendo il cambio di variabile $x = \omega t$

$$a_k = \frac{4V}{\pi} I_k,$$

dove

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2kx) dx$$

Applichiamo le formule di Werner:

$$\sin x \cos(2kx) = \frac{1}{2} [\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x],$$

onde:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+2k} \cos(1+2k)x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \frac{1}{1-2k} \cos(1-2k)x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+2k} + \frac{1}{1-2k} \right) \\ &= \frac{1}{1-4k^2}, \end{aligned}$$

cosicché:

$$a_k = \frac{4V}{\pi(1-4k^2)}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= \frac{4V}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{1-4k^2} \right] \\ &= \frac{2V}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega t) - \frac{2}{35} \cos(6\omega t) - \dots \right] \end{aligned}$$

B Sviluppo in serie di Fourier della funzione (9)

Lo sviluppo in serie di Fourier è:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right], \quad (82)$$

con

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Cioè

$$a_k = \frac{\omega V}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos(k\omega t) dt \quad (83)$$

$$b_k = \frac{\omega V}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \cos \omega t \cos(k\omega t) dt$$

Eseguendo il cambio di variabile $x = \omega t$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{V}{\pi} I_k \\ b_k &= \frac{V}{\pi} J_k, \end{aligned} \quad (84)$$

dove:

$$I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos kx dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (85)$$

$$J_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos kx dx, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Calcoliamo I_k . Per le formule di Werner:

$$\sin x \cos kx = \frac{1}{2} [\sin(1+k)x + \sin(1-k)x]$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\sin(1+k)x + \sin(1-k)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+k} \cos(1+k)x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} - \frac{1}{1-k} \cos(1-k)x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+k} \left(\cos(1+k)\pi - \cos(1+k)\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{1-k} \left(\cos(1-k)\pi - \cos(1-k)\frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (86)$$

Riesce:

$$\begin{aligned}\cos(1+k)\pi &= \cos(\pi + k\pi) \\ &= -\cos k\pi = \\ &= -(-1)^k \\ &= (-1)^{k-1}\end{aligned}$$

Allo stesso modo:

$$\cos(1-k)x = (-1)^{k-1}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\cos(1+k)\frac{\pi}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ \cos(1-k)\frac{\pi}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - k\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Sostituendo tali risultati nella (86):

$$I_k = \frac{1}{1-k^2} \left[k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^{k-1} \right] \quad (87)$$

In particolare:

$$I_0 = +1 \implies V_0 = \frac{V}{\pi} \quad (88)$$

Si noti che la (87) per $k = 1$, per cui calcoliamo direttamente I_1 :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x d(2x) \\ &= -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

onde:

$$V_1 = -\frac{V}{2\pi} \quad (89)$$

Passiamo agli integrali J_k . Nuovamente Werner:

$$\sin x \sin kx = \frac{1}{2} [\cos(1-k)x - \cos(1+k)x],$$

perciò

$$\begin{aligned}
 J_k &= \frac{1}{2} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(1-k)x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(1+k)x dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-k} \sin(1-k)x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} - \frac{1}{1+k} \sin(1+k)x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-k} \left(\sin(1-k)\pi - \sin(1-k)\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{1+k} \left(\sin(1+k)\pi - \sin(1+k)\frac{\pi}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{90}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \sin(1-k)\pi &= \sin(1+k)\pi = 0 \\
 \sin(1-k)\frac{\pi}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\
 \sin(1+k)\frac{\pi}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right),
 \end{aligned}$$

onde

$$J_k = -\frac{k}{1-k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \tag{91}$$

Anche qui dobbiamo calcolare direttamente J_1 :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Ciò implica

$$b_1 = \frac{V}{4}$$

Per ogni $k \in \{2, 3, \dots\}$:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{V}{\pi(1-k^2)} \left[k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^{k-1} \right] \\
 b_k &= -\frac{Vk}{\pi(1-k^2)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{92}$$

A questo punto riscriviamo lo sviluppo (82):

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \sum_{k=2}^{+\infty} b_k \cos(k\omega t) \tag{93}$$

La sostituzione delle (92) nella (93) restituisce la (10).

C Sviluppo in serie di Fourier della funzione ()

Qui è

$$v(t) = f(t) \mid v\left(t + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = v(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (94)$$

essendo:

$$f(t) = \begin{cases} V(\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi - \omega t}), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ V(\sqrt{\pi} + \sqrt{\omega t - \pi}), & \text{se } \frac{\pi}{\omega} < t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}, \quad (95)$$

per cui lo sviluppo in serie di $v(t)$ si scrive:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \end{aligned}$$

I coefficienti di Fourier sono:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} v(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (96)$$

Calcoliamo i coefficienti a_k :

$$a_k = \frac{\omega V}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi - \omega t}) \cos(k\omega t) dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} (\sqrt{\pi} + \sqrt{\omega t - \pi}) \cos(k\omega t) dt \right]$$

È conveniente calcolare dapprima a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega V}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi - \omega t}) dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} (\sqrt{\pi} + \sqrt{\omega t - \pi}) dt \right] \\ &= \frac{\omega V}{\pi} \left(\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\pi - \omega t} dt + \sqrt{\pi} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\omega t - \pi} dt \right) \end{aligned}$$

Calcolando i singoli integrali:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} dt &= \frac{\pi}{\omega}, & \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} dt &= \frac{\pi}{\omega} \\ \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\pi - \omega t} dt &= \frac{2\pi^{3/2}}{\omega}, & \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\omega t - \pi} dt &= \frac{2\pi^{3/2}}{\omega} \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$a_0 = 2V\sqrt{\pi}$$

Per $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$a_k = \frac{\omega V}{\pi} \left[\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\pi - \omega t} \cos(k\omega t) dt + \sqrt{\pi} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\omega t - \pi} \cos(k\omega t) dt \right]$$

Un calcolo diretto porge:

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt = \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\},$$

onde

$$a_k = -\frac{\omega V}{\pi} [I_1(k) + I_2(k)],$$

dove:

$$I_1(k) \stackrel{def}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\pi - \omega t} \cos(k\omega t) dt$$

$$I_2(k) \stackrel{def}{=} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\omega t - \pi} \cos(k\omega t) dt$$

Gli integrali di questo tipo non si esprimono tramite funzioni elementari, bensì attraverso gli *integrali di Fresnel*:

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) d\xi, \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) d\xi, \quad (97)$$

che sono built-in nel software *Mathematica*, da cui si ottiene:

$$I_1(k) = -I_2(k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}$$

Ciò implica:

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\} \quad (98)$$

Calcoliamo i coefficienti b_k :

$$b_k = \frac{\omega V}{\pi} \left[\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(k\omega t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\pi - \omega t} \sin(k\omega t) dt + \sqrt{\pi} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega t) dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\omega t - \pi} \sin(k\omega t) dt \right]$$

Un calcolo diretto porge:

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(k\omega t) dt = -\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega t) dt = -\frac{1 - (-1)^k}{k\omega}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\},$$

onde

$$b_k = -\frac{\omega V}{\pi} [J_1(k) + J_2(k)],$$

dove:

$$J_1(k) \stackrel{def}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sqrt{\pi - \omega t} \sin(k\omega t) dt$$

$$J_2(k) \stackrel{def}{=} \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\omega t - \pi} \sin(k\omega t) dt$$

Utilizzando *Mathematica*:

$$J_1(k) = J_2(k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}$$

Quindi:

$$b_k = \frac{2\omega V}{\pi} J_1(k)$$

Esplicitiamo $J_1(k)$ con *Mathematica*:

$$b_k = \frac{V \sqrt{2} (-1)^k C(\sqrt{2k}) - 2\sqrt{k}}{\sqrt{\pi} k^{3/2}}$$

Finalmente:

$$v(t) = V\sqrt{\pi} + \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2} (-1)^k C(\sqrt{2k}) - 2\sqrt{k}}{k^{3/2}} \sin(k\omega t) \quad (99)$$

D Funzioni lipschitziane

Definizione 30 (Condizione di Lipschitz)

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ verifica} \\ \text{la condizione di Lipschitz} \end{array} \right) \stackrel{def}{\iff} \exists \Lambda > 0 \mid |f(x') - f(x'')| \leq \Lambda |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in X \quad (100)$$

Il numero reale positivo Λ si dice **coefficiente di Lipschitz**.

Le funzioni che verificano la condizione (100) si dicono *lipschitziane*. Sussiste il seguente teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a [?].

Teorema 31

$$f \text{ è lipschitziana in } X \implies f \text{ è uniformemente continua in } X$$

Osservazione 32 La condizione di Lipschitz (100) si può scrivere come:

$$\left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right| \leq \Lambda, \quad \forall x', x'' \in X, \quad (x' \neq x'')$$

In altri termini, una funzione lipschitziana f ha i rapporti incrementali limitati.

E La funzione delta di Dirac

Ricordiamo sommariamente che tale funzione è definita dalla relazione:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (101)$$

e

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad \forall f \in C^1([-\Delta, \Delta]), \quad \forall \Delta > 0 \quad (102)$$

Per $\Delta \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (103)$$

Se $f(x) \equiv 1$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (104)$$

È chiaro che tutte queste relazioni non possono essere verificate simultaneamente da una funzione ordinaria. Infatti, la delta di Dirac è un funzionale lineare i.e. un'applicazione lineare, che associa a una funzione continua $f(x)$ lo scalare $f(0)$, attraverso la relazione (103). Più precisamente, assegnato $x_0 \in \mathbb{R}$ e un suo intorno di ampiezza Δ arbitraria:

$$I_{\Delta}(x_0) = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta),$$

si ha:

$$\begin{aligned} \delta &: C^1(I_{\Delta}(x_0)) \rightarrow \mathbb{R} \\ \delta &: f \rightarrow \delta(f) = f(x_0), \quad \forall f \in C^1(I_{\Delta}(x_0)) \end{aligned}$$

con

$$\delta(f) = \int_{-\Delta}^{+\Delta} \delta(x - x_0) f(x) dx,$$

onde

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (105)$$

Tale proprietà si rivela utile nelle applicazioni, dove la funzione delta di Dirac viene spesso denominata *impulso unitario*.

F Studio della funzione

Studiamo la funzione (30) per un assegnato valore di a .

Insieme di definizione

La funzione è definita in \mathbb{R} .

Intersezione con gli assi coordinati

$$f_\lambda(x) = 0 \iff \frac{1}{e^{-\frac{x}{a}} + 1} = 0 \iff 1 = 0 \text{ mai!}$$

Il grafico $\gamma_a : y = f_\lambda(x)$ non interseca l'asse x .

$$f_\lambda(0) = \frac{1}{2},$$

per cui γ_a interseca l'asse y in $A(0, \frac{1}{2})$.

Studio del segno

$$f_\lambda(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che γ_a è contenuto nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-\frac{|x|}{a}} + 1} \stackrel{a>0}{=} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0^+ + 1} = 1^-,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{\frac{|x|}{a}} + 1} = \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Cioè, la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico di $f_\lambda(x)$, mentre $y = 0$ è asintoto orizzontale a sinistra.

Studio della derivata prima

$$f_\lambda(x) = \frac{V e^{\frac{x}{a}}}{a(1 + e^{\frac{x}{a}})^2} \tag{106}$$

Risulta

$$f_\lambda(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pertanto $f_\lambda(x)$ è strettamente crescente.

G Sviluppo in serie di Fourier della funzione (24)

I coefficienti di Fourier della funzione (24) sono:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx$$

Ma $T = 2\pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) \sin kx dx$$

Calcoliamo dapprima a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) dx \\ &= \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} dx \\ &= V \end{aligned}$$

Per $k \in \{1, 2, \dots\}$:

$$a_k = \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{V}{k\pi} \sin kx \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

I coefficienti b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{V}{k\pi} \cos kx \Big|_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{V}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k}, \end{aligned}$$

per cui lo sviluppo di Fourier è:

$$v(x) = V \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx \right]$$

H Sviluppo in serie di Fourier della funzione (30)

Abbiamo:

$$f_{\lambda}(x) = \frac{a_0(\lambda)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k(\lambda) \cos kx + b_k(\lambda) \sin kx],$$

con

$$\begin{aligned} a_k(\lambda) &= \frac{V}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{e^{-\frac{x}{\lambda}} + 1} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k(\lambda) &= \frac{V}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kx}{e^{-\frac{x}{\lambda}} + 1} dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{107}$$

Calcoliamo $a_0(\lambda)$:

$$\begin{aligned} a_0(\lambda) &= \frac{V}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{e^{-\frac{x}{\lambda}} + 1} \\ &= \frac{V}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}} dx}{1 + e^{\frac{x}{\lambda}}} \\ &= \frac{\lambda V}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d(1 + e^{\frac{x}{\lambda}})}{1 + e^{\frac{x}{\lambda}}} \\ &= \frac{\lambda V}{\pi} \ln \left(\frac{1 + e^{\pi/\lambda}}{1 + e^{-\pi/\lambda}} \right) \end{aligned}$$

Ma

$$\frac{1 + e^{\pi/\lambda}}{1 + e^{-\pi/\lambda}} = \frac{1 + e^{\pi/\lambda}}{e^{-\pi/\lambda}(1 + e^{\pi/\lambda})} = e^{\pi/\lambda},$$

e prendendo il logaritmo:

$$\ln \left(\frac{1 + e^{\pi/\lambda}}{1 + e^{-\pi/\lambda}} \right) = \ln e^{\pi/\lambda} = \frac{\pi}{\lambda},$$

per cui:

$$a_0(\lambda) = V$$

Cioè il termine a_0 è indipendente da λ . Questo risultato è ragionevole, giacchè $\frac{a_0}{2}$ è il valor medio di $f_\lambda(x)$ in $[-\pi, \pi]$. Per $k \in \{1, 2, \dots\}$ gli integrali a secondo membro delle (107) non si esprimono tramite funzioni elementari, bensì attraverso la funzione ipergeometrica che è *built-in* in *Mathematica*:

$${}_2F_1(a, b, c; z), \quad z \in \mathbb{C}$$

Per $\lambda = 1$

$$a_k(1) = \frac{1}{2k\pi} [-i * (-1)^k \cdot {}_2F_1(1, -ik, 1 - ik; -e^\pi) + i(-1)^k \cdot {}_2F_1(1, -ik, 1 - ik, e^{-\pi}) + i(1)^k \cdot {}_2F_1(1, ik, 1 + ik, -e^\pi) - i(1)^k \cdot {}_2F_1(1, ik, 1 + ik, -e^{-\pi})],$$

che sono comunque reali, ad esempio:

$$a_1(1) = 3.75482 \cdot 10^{-17}, \quad a_2(1) = 3.75482 \cdot 10^{-17}, \quad a_3(1) = -6.62616 \cdot 10^{-18}$$

che a loro volta suggeriscono

$$a_k(1) = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}$$

I coefficienti $b_k(1)$ si esprimono in modo simile.

I Sviluppo in serie della funzione (79)

La funzione (79) è dispari, per cui la serie di Fourier è di soli seni:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx, \tag{108}$$

con

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \tag{109}$$

La somma parziale di ordine n :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \tag{110}$$

Gli integrali a secondo membro della (109) vanno calcolati numericamente, e per $n \leq 50$ ciò non crea problemi a *Mathematica*. Eseguendo l'integrazione numerica per $n > 50$ le impostazioni di default del software restituiscono un messaggio di errore, ed è necessario utilizzare le giuste opzioni a causa delle infinite oscillazioni della funzione integranda in un intorno di $x = 0$.

Tali integrali vanno calcolati numericamente.

Riferimenti bibliografici

- [1] Onofri E. Destri C., 1996. *Istituzioni di Fisica Teorica*. Tamburini Editore
- [2] Cercignani C., 1978. *Teoria ed applicazioni della serie di Fourier*. Tamburini Editore
- [3] Ghizzetti A., 1978. *Lezioni di Analisi Matematica, vol II*. Veschi Editore.
- [4] Ghizzetti A., 1978. *Complementi ed esercizi di Analisi Matematica, vol II*. Veschi Editore.
- [5] Smirnov V.I., 1993. *Corso di Matematica Superiore, vol. IV*. Editore Riuniti.
- [6] Piskunov. N., 2004. *Calcolo differenziale e integrale, vol. 2*. Editore Riuniti.
- [7] Spiegel M.R., 1992. *Analisi di Fourier*. Etas
- [8] Colozzo M., 2015. [Le coordinate di Fourier](#).
- [9] Zygmund A., 1955. *Trigonometrical Series*. Dover
- [10] Colozzo M., 2015. [Il miglior polinomio approssimante](#).