Le scimmie di Atwood

Marcello Colozzo http://extrabyte.infohttp://extrabyte.info

Esercizio 1 *(***Le scimmie di Atwood***)*
Due scimmie di massa $m = 20\,\mathrm{kg}$ sono appese a una puleggia ideale P nella cui gola passa una fune ideale f (fig. 1).

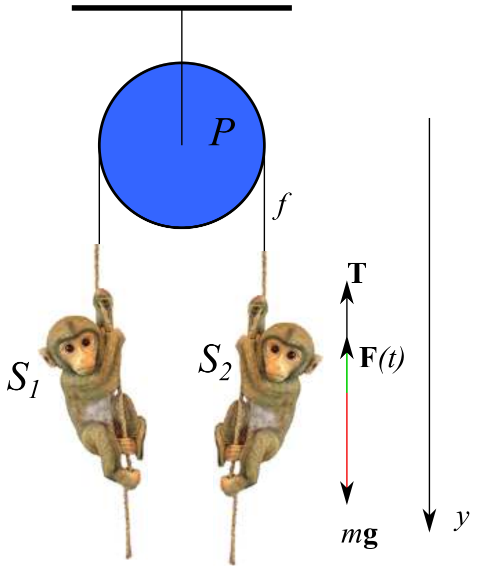

Figura 1: Esercizio 1.

Improvvisamente, la scimmia S_2 si arrampica verso l'alto alla velocità costante di $0.98\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$. *Cosa succede all'altra scimmia?*

Soluzione

Sia $t = 0$ l'istante in cui la scimmia S_2 inizia ad arrampicarsi. Ne consegue che per $t < 0$ il sistema composto dalle due scimmie è in equilibrio statico. Infatti basta analizzare le forze agenti sulla singola scimmia. Per S_1 abbiamo il diagramma di fig. 2

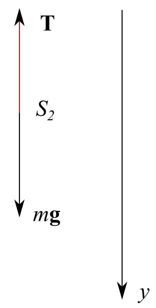

Figura 2: Esercizio 1.

Cioè

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow -T + mg = 0$$

Similmente per la scimmia S_1. All'istante $t = 0$ la scimmia S_2 dà uno strattone alla fune f (diversamente, rimarrebbe in equilibrio statico), che può essere modellizzato attraverso una forza costante per un breve intervallo di tempo τ:

$$F(t) = \begin{cases} F_0\ , & \text{se } t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

Denotando con $\mathbf{j}$ il versore dell'asse verticale y orientato verso il basso, si ha manifestamente:

$$\mathbf{F}(t) = -F_0 j, \quad \forall t \in [0, \tau] \tag{2}$$

Per il terzo principio della dinamica, la fune esercita su S_2 una reazione uguale e contraria, cosicché il diagramma delle forze diviene come quello di fig. 3, dove oltre alla tensione c'è il termine addizionale $-\mathbf{F}(t)$, che si comporta alla stregua di una tensione e come tale verrà "trasmessa" dalla fune ideale f all'altra scimmia. Questa considerazione ci suggerisce un diagramma delle forze agenti su S_1 di quello disegnato per la seconda scimmia.

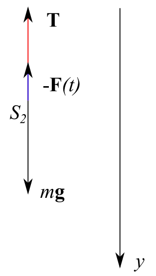

Figura 3: Esercizio 1.

Applicando il secondo principio della dinamica a S_2:

$$-\mathbf{F}(t) + \underbrace{\mathbf{T} + m\mathbf{g}}_{=\mathbf{0}} = m\mathbf{a}$$

La scimmia S_2 accelera verso l'alto nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$, per cui proiettando l'equazione vettoriale precedente sull'asse y:

$$-F_0 = -ma,$$

da cui

$$a = -\frac{F_0}{m}, \quad \forall t \in [0, \tau]$$

La velocità di S_2 è

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{F_0}{m}t, & t \in [0, \tau] \\ v_1, & t > \tau \end{cases}, \tag{3}$$

essendo $v_1 = v(\tau) = -0.98\,\mathrm{m/s}$ Ciò perché per $t \geq \tau$ la forza cessa di agire, e il sistema recupera l'equilibrio dinamico (risultante delle forze è uguale al vettore nullo). Quindi

$$v_1 = -\frac{F_0}{m}\tau,$$

da cui possiamo ricavare il modulo della forza

$$|\mathbf{F}_0| = p_1\tau$$

essendo $p_1 = m|v_1|$ la quantità di moto della scimmia. Ad esempio, supponendo $\tau = 1\,\mathrm{s}$ si ha

$$|\mathbf{F}_0| = 196\,\mathrm{N}$$

Per rispondere al quesito posto, abbiamo visto che sulla scimmia S_1 abbiamo lo stesso sistema di forze, per cui la predetta scimmia pur non arrampicandosi, trasla uniformemente verso l'alto con la stessa velocità della scimmia S_1.