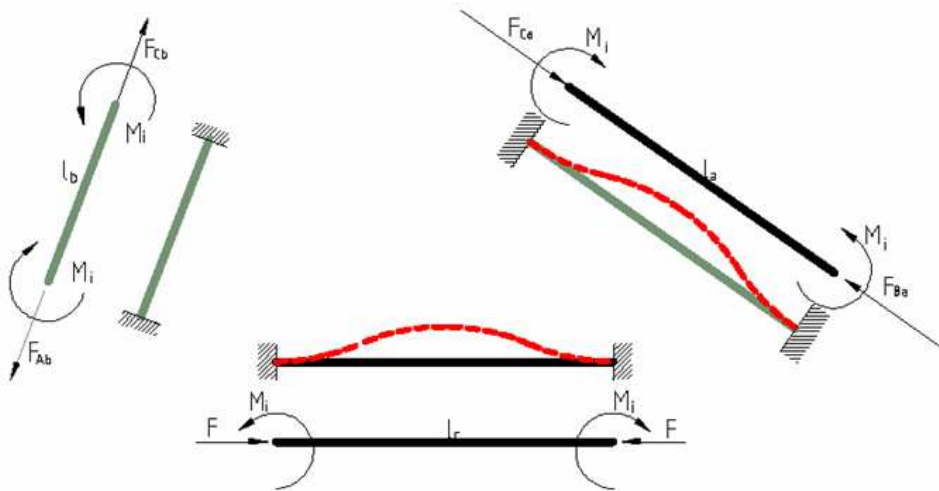


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Esercizi svolti di Scienza delle Costruzioni

Ing. Giorgio Bertucelli



1 Esercizi svolti

Esercizio 1 (Ellissoide di rivoluzione sottoposto a pressione interna uniforme)

Determinare gli sforzi nella parete del recipiente rappresentato da un ellissoide di rivoluzione.

Soluzione

Ricordiamo innanzitutto come si costruisce un'ellisse noti i semiassi a e b . Si tracciano due circonferenze, una di raggio a e l'altra di raggio b . Tracciata una retta inclinata di φ sull'asse x , questa incontra le due circonferenze nei punti P_1 e P_2 (fig. 1); da questi si tracciano i segmenti verticali e orizzontali per ottenere ascissa e ordinata del punto P :

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad (1)$$

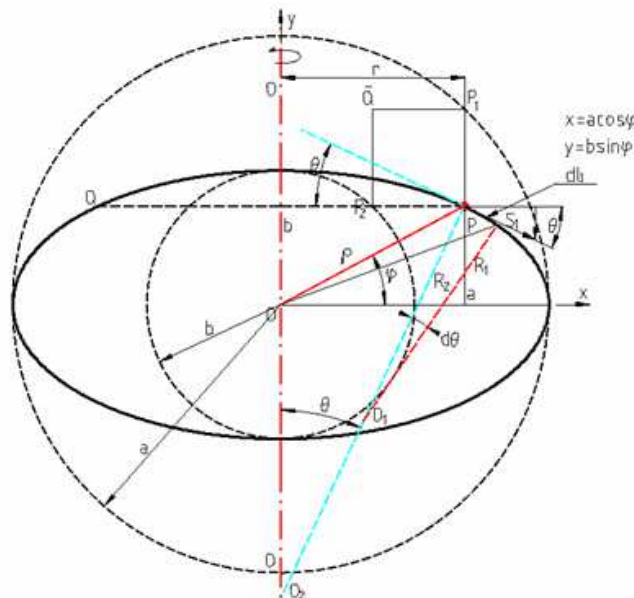


Figura 1: Esercizio 1.

L'equazione canonica dell'ellisse è

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \implies y = \frac{b}{a} (a^2 - x^2)^{1/2} \quad (2)$$

In un ellissoide di rivoluzione con asse OO i meridiani ellissi. Per determinare gli sforzi nella parete del recipiente ellissoide è necessario determinare la curvatura in un punto generico P . Ricordiamo dalla **Geometria Differenziale** che il vettore posizione ρ in un punto generico P di un ellisse è

$$\rho = x\mathbf{i} + (b^2 - \varepsilon^2 x^2)^{1/2} \mathbf{j} \quad \text{dove } \varepsilon = \frac{b}{a} \implies \frac{d\rho}{dx} = \mathbf{i} - \frac{x\varepsilon^2}{(b^2 - \varepsilon^2 x^2)^{1/2}} \mathbf{j}$$

$$\implies \frac{d\rho}{dx} = \mathbf{i} - \frac{x\varepsilon^2}{y} \mathbf{j}$$

$$\frac{ds}{dx} = \left| \frac{d\rho}{dx} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{x\varepsilon^2}{y}\right)^2} = \frac{(y + x^2\varepsilon^4)^{1/2}}{y}$$

Dunque il vettore tangente in P è

$$\mathbf{T} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dx} \frac{dx}{ds} = y \frac{\mathbf{i} - \frac{x\varepsilon^2}{y}\mathbf{j}}{(y^2 + x^2\varepsilon^4)^{1/2}} \quad (3)$$

Segue

$$\frac{d\mathbf{T}}{dx} = \frac{d}{dx} \left[y (y^2 + x^2\varepsilon^4)^{-1/2} \right] \mathbf{i} + \frac{d}{dx} \left[-x\varepsilon^2 (y^2 + x^2\varepsilon^4)^{-1/2} \right] \mathbf{j}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dx} = \kappa \mathbf{N} \\ \kappa &= \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \text{curvatura} \implies \frac{1}{\kappa} = \text{raggio di curvatura} \end{aligned} \quad (4)$$

$$R_2 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{1/2}}{b^2} \quad (5)$$

e poiché lo spostamento infinitesimo lungo un meridiano dell'ellisse è dl , sarà:

$$R_1 = \frac{dl}{d\theta} \implies R_1 = R_2^3 \frac{b^2}{a^4} \quad (6)$$

Nel punto di un parallelo di raggio r lo sforzo sarà espresso da

$$S_1 = \frac{pr}{2 \sin \theta} = p \frac{R_2}{2} \quad (7)$$

Tenendo presente questi **appunti**:

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = p \quad (8)$$

si otterrà

$$S_2 = p \frac{R_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{2} \right) \quad (9)$$

Nel vertice (polo) dove $x = 0$, $y = b$ si avrà

$$S_1 = S_2 = p \frac{R_2}{2} \quad (10)$$

All'equatore dove $x = a$, $y = 0$ si avrà

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \quad \text{e} \quad R_2 = a \quad (11)$$

Esercizio 2 *Calcolo dimensionale delle aste della gru di fig. 2.*

Soluzione

In una struttura reticolare, dove tutti i nodi sono cerniere, le forze interne alla struttura si riducono a soli sforzi normali alle sezioni delle aste; gli sforzi agiscono sulle aste o a trazione – tiranti – o a carico di punta – puntoni (in rosso). La procedura di calcolo è la seguente.

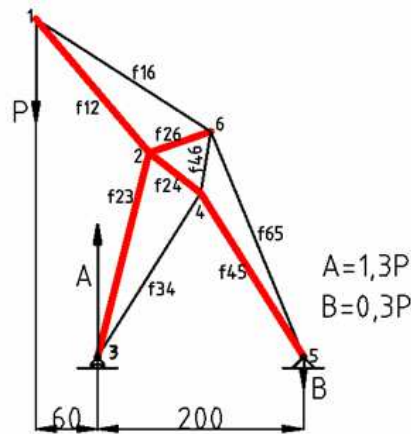


Figura 2: Esercizio 2.

1. Dati i carichi di progetto, si calcolano le reazioni vincolare esterne. Nel nostro caso la gru è una struttura isostatica. Dato il carico esterno P le reazioni vincolari in A (cerniera con carrello) e in B (cerniera) sono:

$$P \cdot 260 = A \cdot 200 \implies A = 1,3P \implies B = A - P = 0,3P \quad (12)$$

2. Si sceglie una scala per disegnare i vettori dei carichi e delle reazioni vincolari.
3. Si inizia dal primo nodo esterno di fig. 3, a sinistra, in cui confluiscono tre sforzi; ciò affinché sia possibile la scomposizione delle forze. Allo stesso modo si procede per tutti gli altri nodi in cui sono applicate le reazioni vincolari.

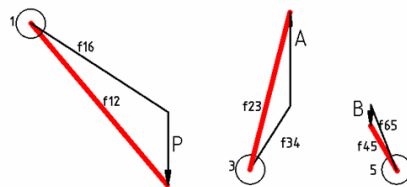


Figura 3: Esercizio 2.

4. Si può quindi procedere con gli altri nodi, nei quali la somma vettoriale degli sforzi dovrà annullarsi. Scelto un nodo, si procederà, rispettando un senso di rotazione e partendo dallo stesso nodo, alla somma vettoriale degli sforzi il cui risultato porterà a disegnare un poligono chiuso: punto di partenza e d'arrivo devono coincidere. In forza della scala di disegno scelta è ora possibile misurare, con lo scalimetro, il valore di uno sforzo su un'asta della struttura reticolare (fig. 4).

Tiranti

Dalla Scienza delle Costruzioni sappiamo che l'*allungamento del tirante* (fig. 5) è dato da:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (13)$$

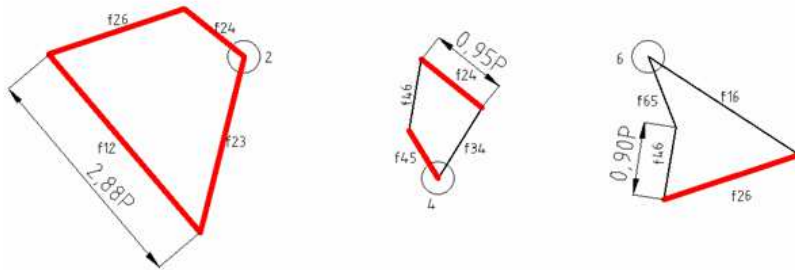


Figura 4: Esercizio 2.

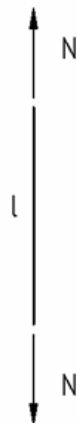


Figura 5: Esercizio 2.

dove A è l'area della sezione del tirante (mm^2), mentre E è il modulo di elasticità di Young (N/mm^2). La *dilatazione*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_{amm}}{E} \quad (14)$$

dove σ_{amm} è la *sollecitazione massima ammissibile del materiale impiegato* (N/mm^2). Pertanto si può scrivere

$$A = \frac{N}{\sigma_{amm}} \quad (15)$$

Puntoni

Dalla Scienza delle Costruzioni, sappiamo che lo *sforzo critico* (fig. 6) è dato da:

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (16)$$

dove J è il momento d'inerzia, mentre l è la lunghezza dell'asta.



Figura 6: Esercizio 2.

L'area A della sezione del puntone viene calcolata nel sistema “ ω ” in uso nelle norme tedesche fin dal 1925. Scelto k_0 (N/mm^2) carico di sicurezza del materiale, scriveremo:

$$A = \frac{\omega N}{k_0} \quad (17)$$

I valori di ω in funzione del *rapporto di snellezza* λ del puntone e del tipo di acciaio impiegato sono riportate nelle Norme Costruttive DIN tedesche, UNI italiane e così via.

Esercizio 3 *Disegnare il cremoniano della pensilina di fig. 7.*

Soluzione

Noti i carichi esterni P si determinano graficamente le reazioni vincolari esterne A e B .

Sceglieremo di scomporre il vettore somma $3P$ nella direzione dell'asta puntone l_{56} e nella direzione determinata dal punto G , baricentro dei tre carichi P , e della cerniera B .

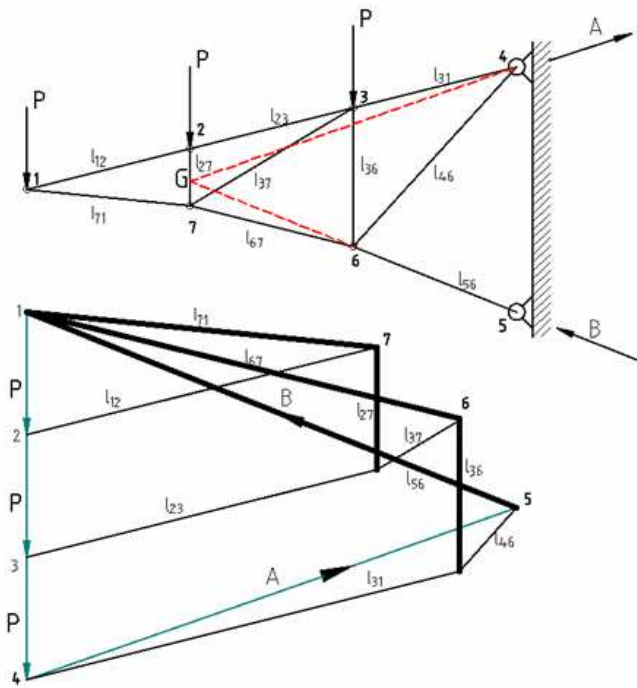


Figura 7: Esercizio 3.

I primi nodi da prendere in considerazione sono quelli relativi ai carichi esterni e alle reazioni vincolari: 1, 2, 3, 4, 5. La somma vettoriale degli sforzi attorno ad un nodo avviene nel senso contrario a quello scelto per contare gli sforzi da sommare. Per esempio: scelto il senso orario per il nodo 1, la somma vettoriale si otterrà in senso orario:

$$\mathbf{P} + \mathbf{l}_{12} + \mathbf{l}_{71} = \mathbf{0}$$

Gli sforzi entranti nel nodo sono i puntoni (spessore grosso), quelli uscenti dal nodo sono i tiranti (spessore sottile).

Esercizio 4 Disegnare il cremoniano della trave Polonceau (fig. 8).

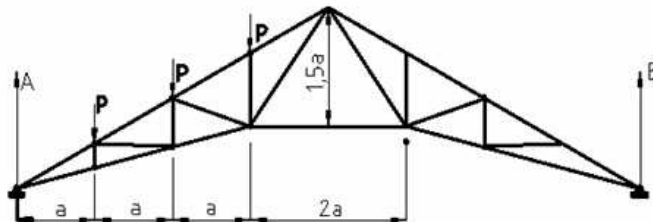


Figura 8: Esercizio 4.

Soluzione

La struttura è simmetrica e caricata simmetricamente; se ne può dunque studiare solo la metà. La cerniera in alto va sostituita con una forza verticale \mathbf{T} . L'asta centrale va sostituita dalla forza \mathbf{S} (fig. 9).

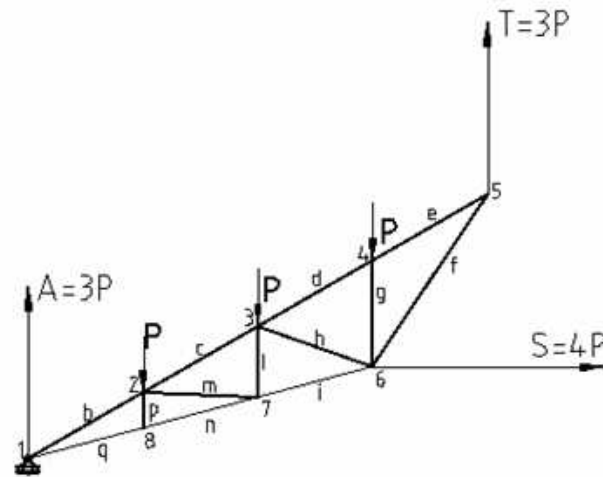


Figura 9: Esercizio 4.

Per le condizioni di equilibrio alle traslazioni si ha:

$$A = T \implies A = T = 3P \quad (18)$$

Per le condizioni di equilibrio alle rotazioni si ha:

$$A4a - P3a - P2a - Pa - Sy = 0 \implies 12aP - 6aP = Sy \implies S = P \frac{6a}{y} \quad (19)$$

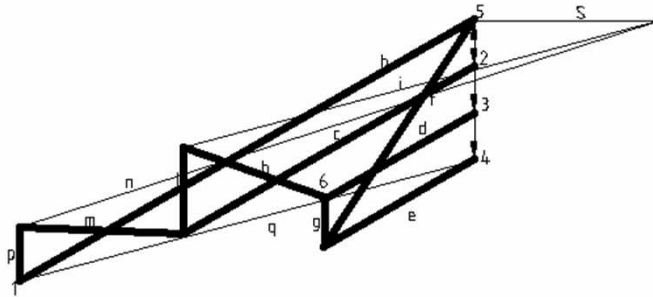


Figura 10: Esercizio 4.

Esercizio 5 (Esame di Scienza delle Costruzioni – Bologna – 1964)

Determinare le condizioni dell'equilibrio elastico della struttura di figura 11).

Soluzione

La struttura è chiaramente isostatatica esternamente e tre volte iperstatica internamente, cioè lo stesso momento d'incastro ripetuto per ciascun vertice del triangolo. Le condizioni di equilibrio esterne sono (fig. 12)

$$F \cdot h = F_{A_v} \cdot l_c, \quad F_{A_v} = F_{B_v} \quad (20)$$

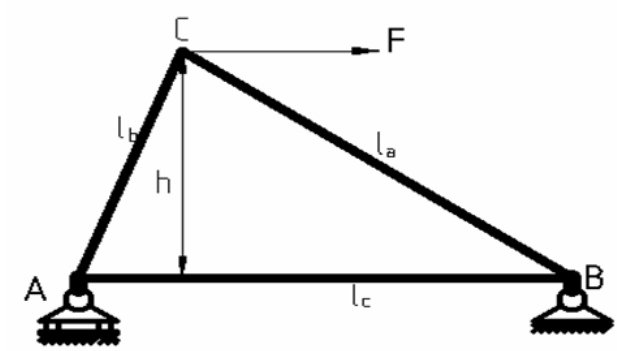


Figura 11: Esercizio 5.

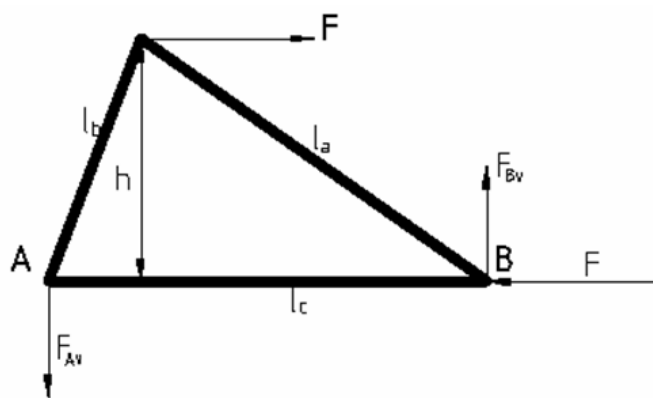


Figura 12: Esercizio 5.

Si immagini adesso di studiare la struttura smembrata nei suoi tre lati.

Ciascuna trave, non più incastrata, bensì incernierata, è sottoposta a sforzo normale e ad un momento d'incastro M che garantisce la conservazione dell'angolo in ogni vertice del triangolo (fig. 13).

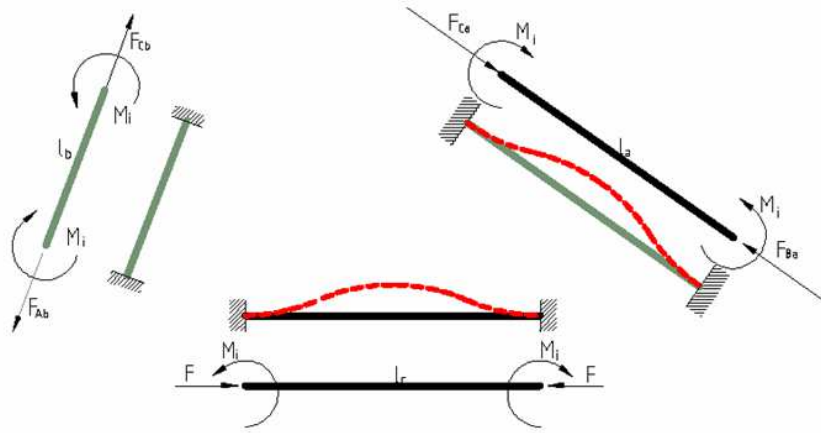


Figura 13: Esercizio 5.

La trave \overline{AC} è un tirante, \overline{AB} e \overline{BC} sono puntoni. La trave \overline{AC} è soggetta a solo sforzo normale ed è soggetta a un allungamento

$$\Delta l_b = \frac{F_{AC} l_b}{E \cdot A},$$

dove E è il modulo di Young ed A la sezione della trave.

Sui puntoni prendiamo come esempio la trave \overline{AB} e supponiamo che essa sia caricata di punta e priva di momento d'incastro M_i (fig. 14).

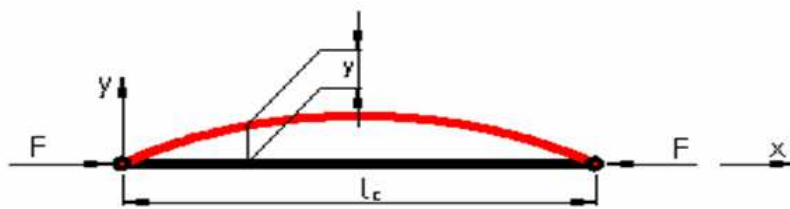


Figura 14: Esercizio 5.

Scriviamo l'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F y}{E J_{\min}} \implies \frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha^2 y, \quad \alpha^2 \stackrel{def}{=} \frac{F}{E J_{\min}} \tag{21}$$

Il suo integrale generale è

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

La sua derivata è

$$\frac{dy}{dx} = \alpha C_1 \cos \alpha x - \alpha C_2 \sin \alpha x \tag{22}$$

Le condizioni ai limiti sono:

$$\begin{aligned} y(x=0) = 0 &\implies C_2 = 0 \implies y = C_1 \sin \alpha x \\ y(x=l_c) = 0 &\implies 0 = C_1 \sin \alpha l_c \end{aligned}$$

La seconda condizione è verificata se $C_1 = 0$ ovvero se la trave rimane rettilinea; oppure se

$$\sin \alpha x = 0 \implies \alpha x = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Osserviamo che non può essere $n = 0$ perché $\alpha l_c \neq 0$. Quindi la prima soluzione accettabile è $n = 1$. Pertanto $\alpha l_c = \pi$. Sostituendo α scriveremo

$$\frac{\pi^2}{l_c^2} = \frac{F_{cr}}{EJ_{\min}} \implies F_{cr} = \frac{\pi^2}{l_c^2} EJ_{\min} \quad (23)$$

che è la **forza di Eulero**. È facile persuadersi che

$$F < F_{cr} \implies \sin \alpha l_c \neq 0 \implies C_1 = 0$$

cioè l'unica configurazione equilibrata è la trave rettilinea: equilibrio stabile.

Si possono incontrare quattro diverse condizioni di vincolo per il carico di punta. La forza critica F_{cr} assume un valore diverso per ciascuno dei quattro casi rappresentati in fig. 15:

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(2l)^2}, \quad F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(l)^2}, \quad F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(l/\sqrt{2})^2}, \quad F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(l/2)^2} \quad (24)$$

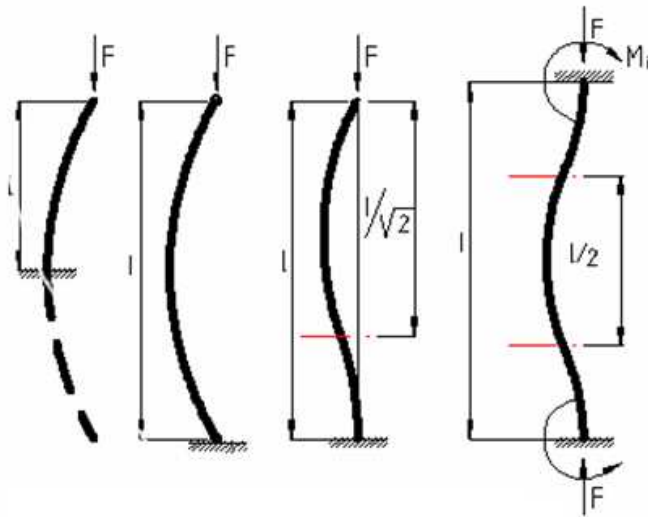


Figura 15: Esercizio 5.

Esercizio 6 (Esame di Scienza delle Costruzioni – Bologna – 1964)

Descrivere il regime statico della struttura di figura 16) e calcolare le sue deformazioni.

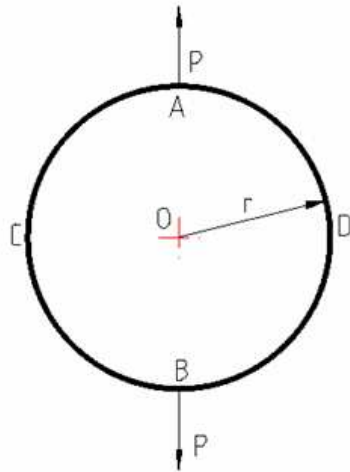


Figura 16: Esercizio 6.

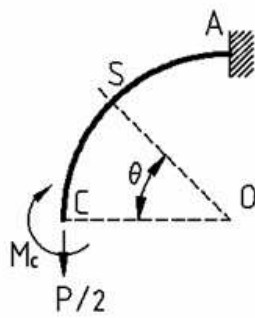


Figura 17: Esercizio 6.

Soluzione

La struttura presenta due assi di simmetria, ragion per cui nelle sezioni A, B, C, D la rotazione della sezione è nulla. In tali sezioni ci saranno invece delle deformazioni che potremo calcolare.

Si può pensare di prendere un quarto di cerchio AC e pensare che esso sia perfettamente incastrato in A (fig. 17).

Nella sezione S avremo un momento flettente M dovuto al carico $P/2$ e al momento incognito M_C :

$$M = M_C - \frac{P}{2}r(1 - \cos \theta) \quad (25)$$

Il lavoro di deformazione è

$$L = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EJ} ds \quad (26)$$

dove E è il modulo di Young e J è il momento di inerzia della sezione di struttura:

$$L = \frac{1}{2EJ} \int_0^{\pi/2} \left[M_C - \frac{P}{2}r(1 - \cos \theta) \right] r d\theta \quad (27)$$

Applicando il **teorema di Castigliano** nel punto C , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial M_C} = 0 &\implies \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} \left[M_C - \frac{P}{2}r(1 - \cos \theta) \right] r d\theta = 0 \\ &\implies \int_0^{\pi/2} M_C r d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2}r^2 d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2}r^2 \cos \theta d\theta = 0 \\ &\implies M_C r \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2}r^2 \frac{\pi}{2} + \frac{P}{2}r^2 = 0 \\ &\implies M_C = P \cdot r \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) = 0.182P \cdot r = M_D \end{aligned}$$

Nei punti A e B si ha:

$$M_A = M_B = M_C - \frac{P}{2}r \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = P \cdot r \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) - \frac{P}{2}r = -0.318 \cdot P \cdot r$$

Calcoliamo l'aumento del diametro \overline{AB} . In una generica sezione S il momento vale:

$$\begin{aligned} M = M_C - \frac{P}{2}r(1 - \cos \theta) &\implies M = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) P \cdot r - \frac{P}{2}r \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) \\ &= P \cdot r \frac{\pi \cos \theta - 2}{2\pi} \implies \frac{\partial M}{\partial P} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) r - \frac{r}{2} (1 - \cos \theta) = r \frac{\pi \cos \theta - 2}{2\pi} \end{aligned}$$

Continuando ad applicare il teorema di Castigliano scriveremo per 4 quarti di cerchio:

$$\begin{aligned}
 \Delta \overline{AB} &= \int_s M \frac{\partial M}{\partial P} \frac{ds}{EJ} = 4 \cdot \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} P \cdot r \frac{\pi \cos \theta - 2}{2\pi} \cdot r \frac{\pi \cos \theta - 2}{2\pi} r d\theta \\
 &= \frac{4}{EJ} \int_0^{\pi/2} P \cdot r^2 \left(\frac{\pi \cos \theta - 2}{2\pi} \right)^2 r d\theta \\
 &= \frac{4}{EJ} P \cdot r^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi \cos \theta - 2}{2\pi} \right)^2 d\theta \\
 &= \frac{4}{EJ} P \cdot r^3 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{4} d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\pi^2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\pi} d\theta \right) \\
 &= \frac{4}{EJ} P \cdot r^3 \left(\frac{\pi}{4 \cdot 4} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{EJ} P \cdot r^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0.149 \frac{1}{EJ} P \cdot r^3
 \end{aligned}$$

che è l'aumento del diametro \overline{AB} .

Esercizio 7 Determinare le reazioni vincolari dell'arco di figura 18).

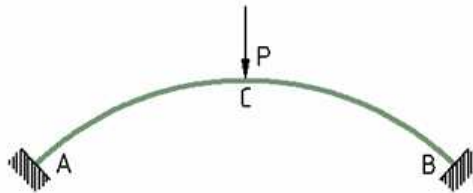


Figura 18: Esercizio 7.

Soluzione

L'arco è tre volte ipostatico; assumiamo come incognite il momento M_C e la spinta orizzontale H (fig. 19). Il momento in una generica sezione S è:

$$M = M_C + Hy - \frac{P}{2}x \quad (28)$$

Per simmetria le condizioni in C sono:

$$\Delta(\theta_C - \theta_B) = 0, \quad \Delta(x_C - x_B) = 0 \quad (29)$$

Tenendo conto della sola deformazione provocata da M e imponendo $y_C = 0$, le due equazioni che consentono di determinare le due incognite M_C e H sono:

$$\int_C^B M ds = 0, \quad \int_C^B My ds = 0 \quad (30)$$

Segue

$$\begin{cases} M_C \int_0^{\pi/3} r d\theta + H \int_0^{\pi/3} y r d\theta = \frac{P}{2} \int_0^{\pi/3} x r d\theta \\ M_C \int_0^{\pi/3} y r d\theta + H \int_0^{\pi/3} y^2 r d\theta = \frac{P}{2} \int_0^{\pi/3} x y r d\theta \end{cases} \quad (31)$$

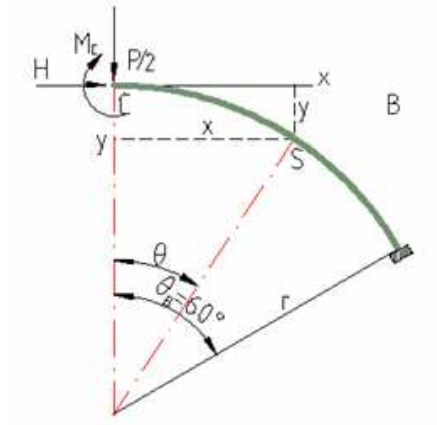


Figura 19: Esercizio 7.

Gli integrali valgono:

$$\int_0^{\pi/3} r d\theta = \frac{\pi}{3} r$$

$$\int_0^{\pi/3} y r d\theta = \int_0^{\pi/3} (r - r \cos \theta) r d\theta = r^2 \int_0^{\pi/3} d\theta - r^2 \int_0^{\pi/3} \cos \theta d\theta = r^2 \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$

$$\int_0^{\pi/3} x r d\theta = \int_0^{\pi/3} r^2 \sin \theta d\theta = r^2 \int_0^{\pi/3} \sin \theta d\theta = r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2} r^2$$

$$\int_0^{\pi/3} y^2 r d\theta = \int_0^{\pi/3} (r - r \cos \theta)^2 r d\theta = r^3 \int_0^{\pi/3} (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) d\theta = r^3 \frac{4\pi - 7\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_0^{\pi/3} x y r d\theta = \int_0^{\pi/3} r \sin \theta (r - r \cos \theta) r d\theta = r^3 \int_0^{\pi/3} \sin \theta (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{1}{8} r^3$$

Sostituendo nelle (31):

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} r M_C + r^2 \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} H = \frac{r^2}{4} P \\ \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} r^2 M_C + r^3 \frac{4\pi - 7\sqrt{3}}{8} H = \frac{1}{16} r^3 P \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\pi}{3} M_C + r \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} H = \frac{r}{4} P \\ \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} M_C + \frac{4\pi - 7\sqrt{3}}{8} r H = \frac{1}{16} r P \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$M_C = \frac{3}{2} \frac{5\pi - 9\sqrt{3}}{4\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 54} r P = 0.09537 P \quad (32)$$

$$H = \frac{9}{2} \frac{2\sqrt{3} - \pi}{4\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 54} P = 0.831 P$$

Il momento d'incastro risulta:

$$M_A = M_B = M_C + \frac{H}{2} r - \frac{P}{2} r \sin \frac{\pi}{3} = \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{6\pi + 9\sqrt{3} - 2\pi^2\sqrt{3}}{4\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 54} r P = 0.078 r P$$

Le sezioni d'incastro A e B saranno sottoposte a sforzo normale N e sforzo di taglio T che si determinano facilmente proiettando H e $P/2$ lungo la normale e la tangente alla sezione.

Scriveremo vettorialmente

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}_H + \mathbf{T}_H, \quad \frac{\mathbf{P}}{2} = \mathbf{N}_P + \mathbf{T}_P \quad (34)$$

Sommando vettorialmente:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_H + \mathbf{N}_P, \quad \mathbf{T}_P = \mathbf{T}_H + \mathbf{T}_P \quad (35)$$

Esercizio 8 Determinare gli sforzi nella membrana curva di fig. (20).

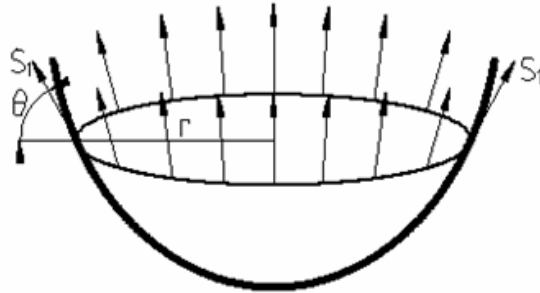


Figura 20: Esercizio 8.

Soluzione

Indichiamo con \mathbf{Q} la risultante di tutte le forze esterne agenti sulla parte sottostante della membrana. In forza della simmetria la forza \mathbf{Q} è verticale, rivolta verso l'alto; pertanto potremo scrivere:

$$Q = S_1 \sin \theta \cdot 2\pi r$$

Ma r è il raggio del parallelo

$$r = R_2 \sin \theta \implies Q = S_1 2\pi R_2 \sin^2 \theta$$

da cui

$$S_1 = \frac{Q}{2\pi R_2 \sin^2 \theta} \quad (36)$$

Consideriamo un elemento infinitesimo di membrana definito da due meridiani ab e cd e da due paralleli ac e bd (fig. 21).

Si ha:

$$\overline{ab} = \overline{cd} = dl_1 = R_1 d\theta \quad (37)$$

dove R_1 è il raggio di curvatura del meridiano in un intorno dell'elemento. Inoltre

$$\overline{ac} = dl_2 = r d\psi = R_2 \sin \theta \cdot d\psi \quad (38)$$

Il lato \overline{bd} differisce da dl_2 per un infinitesimo del secondo ordine. Gli sforzi interni che agiscono sull'elemento sono rappresentati in fig. 22.

Lo sforzo tangenziale nel piano dell'elemento è nullo. Per l'equilibrio dell'elemento $abcd$ in direzione della normale z – positiva verso l'esterno – alla superficie della membrana, la somma delle componenti secondo z degli sforzi interni deve essere uguale e contraria alla

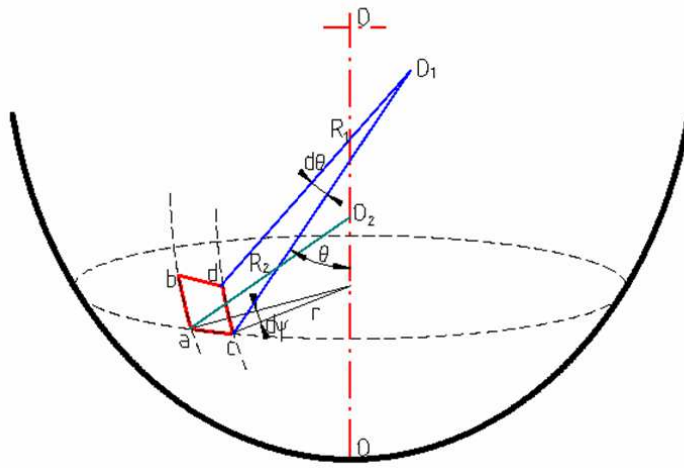


Figura 21: Esercizio 8.

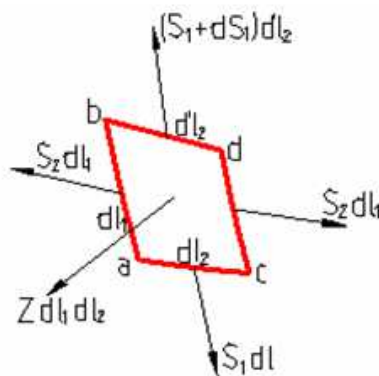


Figura 22: Esercizio 8.

componente delle forze esterne. Seguendo la fig. 23, lo sforzo $S_1 dl_2$ è inclinato rispetto alla normale $+z$ di

$$\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}$$

ragion per cui la sua componente rispetto alla normale $-z$ è

$$S_1 dl_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}\right) = S_1 dl_2 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$$

che è anche la componente, a meno di infinitesimi di ordine superiore, di $(S_1 + S_2) dl_2$. La somma delle componenti è

$$2S_1 dl_2 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = S_1 dl_2 d\theta \quad (39)$$

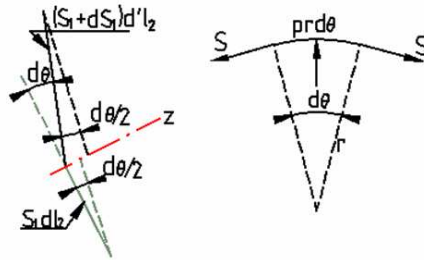


Figura 23: Esercizio 8.

Analogamente gli sforzi $S_2 dl_1$ hanno la risultante nel piano del parallelo, che vale

$$S_2 dl_1 \cdot d\psi$$

la cui componente nella direzione di $-z$ vale $S_2 dl_1 \cdot d\psi \sin \theta$. Scriveremo

$$\begin{aligned} S_1 dl_2 d\theta + S_2 dl_1 \cdot d\psi \sin \theta &= Z dl_1 dl_2 \implies \\ S_1 R_2 \sin \theta d\psi \cdot d\theta + S_2 R_1 d\theta d\psi \sin \theta &= Z \cdot R_1 d\theta \cdot R_2 \sin \theta d\psi \\ \implies S_1 R_2 + S_2 R_1 &= Z R_1 R_2 \implies \frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} = Z \end{aligned} \quad (40)$$