
Regolarità della somma e del prodotto di funzioni

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Da noti teoremi:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] &= l_1 + l_2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] &= l_1 \cdot l_2\end{aligned}\tag{1}$$

Nelle (1) la regolarità di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ è condizione sufficiente ma non necessaria per la regolarità di $f_1(x) + f_2(x)$ e di $f_1(x) f_2(x)$. Ad esempio:

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \sin x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} - \sin x,$$

sono entrambe non regolari per $x \rightarrow +\infty$. Ma la somma $f_1(x) + f_2(x) = \frac{2}{x}$ è ivi regolare, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$. Per quanto riguarda la seconda delle (1), sussiste il teorema:

Teorema 1 *Ipotesi*

$$\begin{aligned}f_1(x) &\text{ è infinitesima in } x_0 \\ f_2(x) &\text{ è ivi definitivamente limitata}\end{aligned}$$

Tesi:

$$f_1(x) f_2(x) \text{ è infinitesima in } x_0$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo che f_1 e f_2 siano entrambe definite in X .

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \quad \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \setminus \{x_0\} \implies |f_1(x)| < \varepsilon \\ \exists I_\Delta(x_0) \mid x \in X \cap I_\Delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies |f_2(x)| < M\end{aligned}$$

Ne segue

$$x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I_\Delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| < \varepsilon + M$$

cioè l'asserto. ■

In maniera analoga si dimostra il teorema

Teorema 2 *Ipotesi*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) &= +\infty \quad [-\infty] \\ \text{Intorno a } x_0, \quad f_2(x) &\text{ è definitivamente maggiore [minore]} \\ &\text{di un numero positivo [negativo]}\end{aligned}$$

Tesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) f_2(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

Ad esempio:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = e^{\sin x}$$

da cui

$$f_2(x) \geq \frac{1}{e} > 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

Ne segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sin x} = +\infty$$

Di contro, se $f_2(x) = \sin x$ si ha che tale funzione non è definitivamente maggiore di un numero positivo (in un intorno di $+\infty$) per cui è violata una delle ipotesi del teorema. D'altra parte è facile convincersi che

$$\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

In fig. 1 riportiamo il grafico di entrambe le funzioni.

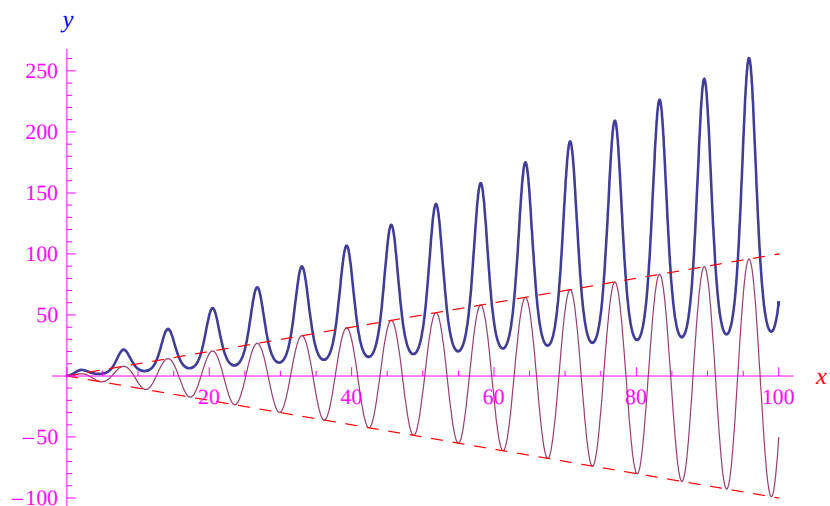


Figura 1: Grafico delle funzioni $x e^{\sin x}$ e $x \sin x$.