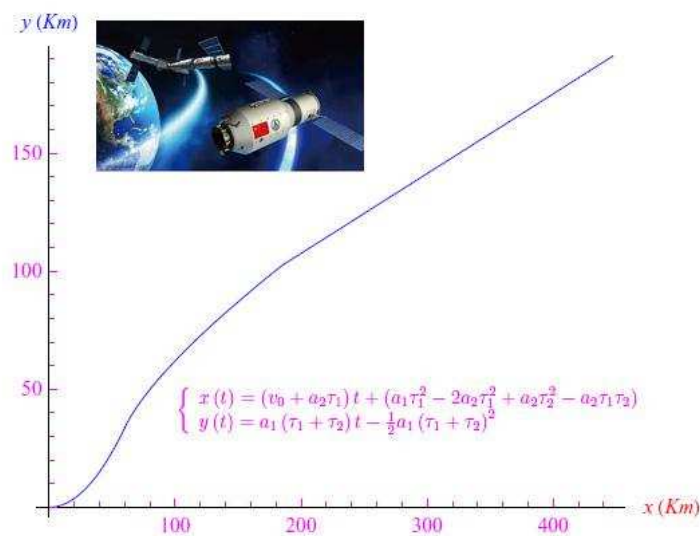


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

La misteriosa rotta dell'*Enterprise*

Marcello Colozzo



Esercizio 1 In un episodio di *Star Trek*, l'astronave *Enterprise* naviga nello spazio siderale (in assenza di campi gravitazionali) a una velocità costante $\mathbf{v}_0$ rispetto a un sistema di riferimento inerziale K . All'istante t_1 viene agganciata da un fascio attrattore che esercita una forza costante $\mathbf{F}_1$ perpendicolare al vettore $\mathbf{v}_0$, dando luogo a una accelerazione $\mathbf{a}_1$.

Dopo un intervallo di tempo τ_1 dall'azione del fascio attrattore, l'astronave accende i motori di boro che sviluppano una forza motrice $\mathbf{F}_2$ parallela e concorde al vettore $\mathbf{v}_0$, dando luogo a una accelerazione $\mathbf{a}_2$. I motori vengono spenti dopo un intervallo di tempo τ_2 , dopodiché l'astronave è libera da forze.

1. Determinare la velocità vettoriale dell'*Enterprise* al termine dell'intervallo τ_2 .
2. Calcolare la posizione dell'astronave al termine del predetto intervallo.
3. Tracciare la rotta dell'*Enterprise*.

Soluzione

Per $t \leq t_1$ la rotta è una retta, giacché il moto è rettilineo ed uniforme. Trattandosi manifestamente di un moto piano, assumiamo come riferimento inerziale K un sistema di assi cartesiani Oxy con l'asse x parallelo e concorde al vettore $\mathbf{v}_0$ e l'origine nel punto corrispondente alla posizione dell'astronave nell'istante t_1 . Ne consegue la configurazione cinematica illustrata in fig. 1.

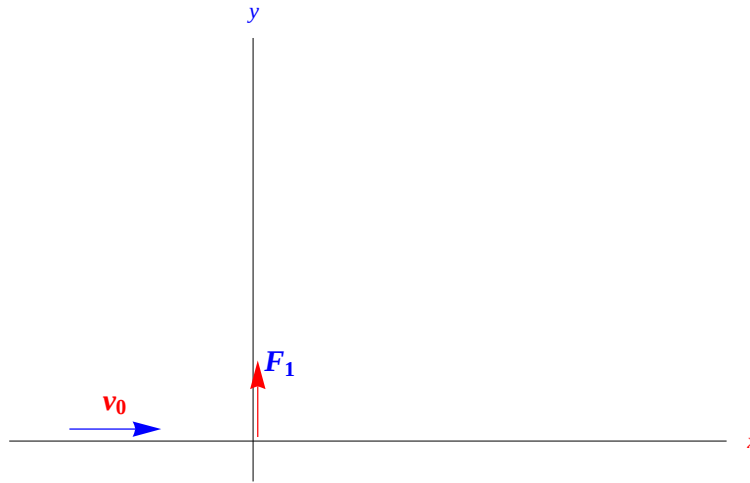


Figura 1: Sistema di riferimento inerziale rispetto al quale si muove l'*Enterprise*.

Non è nota l'intensità della forza esercitata dal fascio attrattore, ma l'intensità del vettore accelerazione:

$$\mathbf{a}_1 = a_1 \mathbf{j} \quad (1)$$

avendo introdotto gli usuali versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ degli assi coordinati. Se $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ è il vettore posizione dell'*Enterprise* in un generico istante t , si ha che nell'intervallo $[0, \tau_1]$, tale funzione vettoriale è un integrale particolare dell'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_1 \quad (2)$$

il cui integrale generale è

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 t^2 + \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2 \quad (3)$$

Le condizioni iniziali sono

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{i} \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{a}_1 t^2, \quad \forall t \in [0, \tau_1] \quad (5)$$

equivalente al sistema di equazioni orarie i.e. rappresentazione parametrica della rotta:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} a_1 t^2, \quad t \in [0, \tau_1]$$

Cioè l'arco di parabola:

$$y = \frac{a_1}{2v_0^2} x^2, \quad x \in [0, v_0 \tau_1] \quad (6)$$

Per $t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ agiscono anche i motori, per cui la risultante delle forze è

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

dove

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \mathbf{i} \quad (7)$$

Anche qui non è nota l'intensità della forza, ma quella dell'accelerazione

$$\mathbf{a}_2 = a_2 \mathbf{i} \quad (8)$$

Ne consegue che nel predetto intervallo di tempo, l'accelerazione vettoriale è

$$\mathbf{a} = a_2 \mathbf{i} + a_1 \mathbf{j} \quad (9)$$

da cui l'equazione differenziale

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} \quad (10)$$

L'integrale generale è

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 + \mathbf{K}_1 t + \mathbf{K}_2 \quad (11)$$

L'integrale particolare deve soddisfare le condizioni iniziali:

$$\mathbf{r}(\tau_1) = v_0 \tau_1 \mathbf{i} + \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 \mathbf{j} \quad (12)$$

$$\mathbf{v}(\tau_1) = v_0 \mathbf{i} + a_1 \tau_1 \mathbf{j}$$

Derivando la (11)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a} t + \mathbf{K}_1 \quad (13)$$

Deve essere

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{a} \tau_1^2 + \mathbf{K}_1 \tau_1 + \mathbf{K}_2 = v_0 \tau_1 \mathbf{i} + \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 \mathbf{j} \\ \mathbf{a} \tau_1 + \mathbf{K}_1 = v_0 \mathbf{i} + a_1 \tau_1 \mathbf{j} \end{cases} \quad (14)$$

Scriviamo

$$\mathbf{K}_1 \equiv K_{1x} \mathbf{i} + K_{1y} \mathbf{j}, \quad \mathbf{K}_2 \equiv K_{2x} \mathbf{i} + K_{2y} \mathbf{j}$$

per cui la seconda delle (14) scritta componente per componente, restituisce il sistema:

$$\begin{cases} a_2 \tau_1 + K_{1x} = v_0 \\ a_2 \tau_1 + K_{1y} = a_1 \tau_1 \end{cases} ,$$

onde

$$K_{1y} = 0, \quad K_{1x} = (v_0 - a_2\tau_1) \implies \mathbf{K}_1 = (v_0 - a_2\tau_1) \mathbf{i} \quad (15)$$

Operando in maniera analoga sulla prima delle (14) si perviene

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{2}a_2\tau_1^2 \mathbf{i} \quad (16)$$

Ciò ci consente di scrivere il vettore posizione nell'intervallo $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$

$$\mathbf{r}(t) = \left[\frac{1}{2}a_2(t^2 + \tau_1^2) + (v_0 - a_2\tau_1)t \right] \mathbf{i} + \frac{1}{2}a_1t^2 \mathbf{j}, \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2] \quad (17)$$

o ciò che è lo stesso, le equazioni orarie

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_2(t^2 + \tau_1^2) + (v_0 - a_2\tau_1)t \\ y(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 \end{cases}, \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2] \quad (18)$$

Per $t \geq \tau_1 + \tau_2$ è $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ giacché l'astronave è libera da forza. Quindi

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{H}_1 t + \mathbf{H}_2, \quad t \geq \tau_1 + \tau_2 \quad (19)$$

Per determinare le costanti di integrazione $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ dobbiamo considerare le nuove condizioni iniziali. Per facilitare i calcoli osserviamo che la prima altro non è che la velocità vettoriale dell'astronave nell'istante in cui si spengono i motori e si annulla il fascio. Infatti, derivando:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{H}_1$$

Calcoliamo la velocità vettoriale a tempi $t \leq \tau_1 + \tau_2$, derivando la (17):

$$\mathbf{v}(t) = (a_2 t + v_0 - a_2\tau_1) \mathbf{i} + a_1 t \mathbf{j} \quad (20)$$

Segue

$$\mathbf{v}(\tau_1 + \tau_2) = [a_2(\tau_1 + \tau_2) + v_0 - a_2\tau_1] \mathbf{i} + a_1(\tau_1 + \tau_2) \mathbf{j} \quad (21)$$

Per quanto precede, a tempi $t \geq \tau_1 + \tau_2$, l'astronave è libera da forze per cui la sua velocità sarà data dal vettore costante (21). Quindi

$$\mathbf{H}_1 = [a_2(\tau_1 + \tau_2) + v_0 - a_2\tau_1] \mathbf{i} + a_1(\tau_1 + \tau_2) \mathbf{j} \stackrel{def}{=} \mathbf{v}_1 \quad (22)$$

Inoltre, il quesito 1 è risolto dalla (21). Per rispondere al quesito 2, dobbiamo determinare l'altra costante di integrazione. Intanto scriviamo

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_1 t + \mathbf{H}_2, \quad t \geq \tau_1 + \tau_2, \quad (23)$$

per cui

$$\mathbf{r}(\tau_1 + \tau_2) = \mathbf{v}_1 \cdot (\tau_1 + \tau_2) + \mathbf{H}_2 \quad (24)$$

Il vettore a primo membro deve essere uguale a (17) calcolato a $\tau_1 + \tau_2$. Quindi

$$\begin{aligned} & (v_0 + a_2\tau_1)(\tau_1 + \tau_2) \mathbf{i} + a_1(\tau_1 + \tau_2) \mathbf{j} + \mathbf{H}_2 = \\ & = [(a_1 - a_2)\tau_1^2 + a_2\tau_2^2 + v_0(\tau_1 + \tau_2)] \mathbf{i} + \frac{1}{2}a_1(\tau_1 + \tau_2)^2 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (25)$$

Dalla (25) ricaviamo $\mathbf{H}_2$ e quindi il vettore posizione o equivalentemente le coordinate cartesiane per $t \geq \tau_1 + \tau_2$:

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 + a_2\tau_1)t + (a_1\tau_1^2 - 2a_2\tau_1^2 + a_2\tau_2^2 - a_2\tau_1\tau_2) \\ y(t) = a_1(\tau_1 + \tau_2)t - \frac{1}{2}a_1(\tau_1 + \tau_2)^2 \end{cases} \quad (26)$$

e la posizione $(x(\tau_1 + \tau_2), y(\tau_1 + \tau_2))$. Utilizzando i seguenti dati:

$$v_0 = 15 \text{ km/s}, \quad a_1 = 4.2 \text{ km/s}^2, \quad a_2 = 18 \text{ km/s}^2, \quad \tau_1 = 4 \text{ s}, \quad \tau_2 = 3 \text{ s},$$

otteniamo la rotta tracciata in fig. 2.

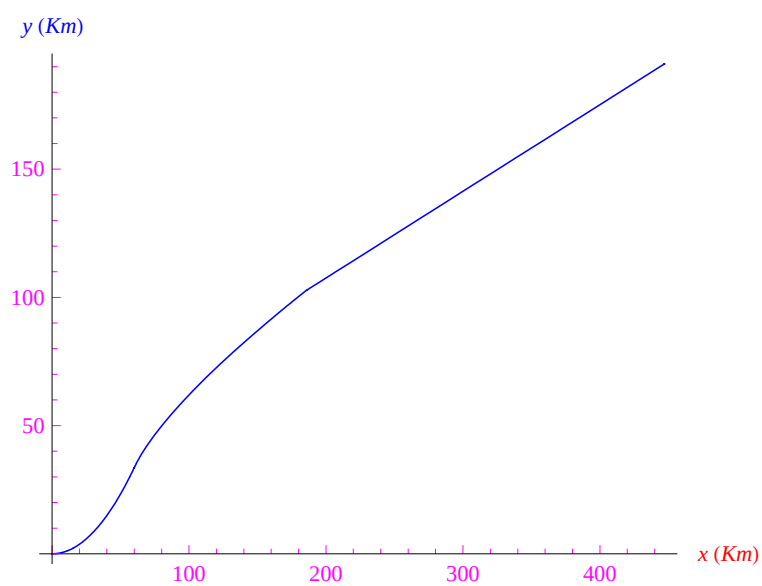


Figura 2: Rotta dell'*Enterprise*.