Rotazioni nello spazio euclideo

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Siano E ed F due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

Definizione 1 *$\hat{A} \in \hom(E, F)$ è* **non singolare** *se* $\ker \hat{A} = \{0_E\}$, *essendo 0_E il vettore nullo di E. Nel caso contrario, diremo che $\hat{A}$ è* **singolare**.

In altri termini, $\hat{A}$ è non singolare se

$$\nexists \xi \in E - \{0_E\} \mid \hat{A}(\xi) = 0_F,$$

dove 0_F è il vettore nullo di F. Per un noto teorema, un omomorfismo suriettivo è un isomorfismo se e solo se è iniettivo, e ciò a sua volta implica $\ker \hat{A} = \{0_E\}$, i.e. la non singolarità di $\hat{A}$. Ne concludiamo che la non singolarità è una condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché E ed F siano isomorfi.

Esercizio 2 *Sia $\mathcal{R}(Oxyz)$ un riferimento cartesiano ortogonale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. La rotazione di un qualunque vettore $\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ attorno all'asse z, è il risultato dell'applicazione di un endomorfismo $\hat{R}_z$:*

$$\hat{R}_z(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

essendo θ l'angolo di rotazione, contato positivamente se la rotazione vista da un osservatore disposto lungo la direzione positiva dell'asse z, è antioraria.

Mostrare che tale endomorfismo è non singolare.

Soluzione

L'immagine di $\hat{R}_z$ è:

$$\hat{R}_z(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}\left(\left\{\hat{R}_z(e_i)\right\}\right), \tag{2}$$

dove $\{e_i\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1, 0, 0), \ e_2 = (0, 1, 0), \ e_3 = (0, 0, 1) \tag{3}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \hat{R}_z(e_1) &= \hat{R}_z(1, 0, 0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \hat{R}_z(e_2) &= \hat{R}_z(0, 1, 0) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \hat{R}_z(e_3) &= \hat{R}_z(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \end{aligned} \tag{4}$$

Da ciò segue che la matrice rappresentativa di $\hat{R}_z$ nella base canonica si scrive:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Risulta

$$\det R_z(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Cioè $R_z(\theta)$ è **ortogonale** i.e. una rotazione attorno all'asse z è una trasformazione ortogonale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Il rango dell'omomorfismo $\hat{R}_z$ è

$$R\left(\hat{R}_z\right) = \rho\left(R_z\left(\theta\right)\right) = 3 \tag{7}$$

Segue dalla solita formula

$$R\left(\hat{R}_z\right) + N\left(\hat{R}_z\right) = \dim \mathbb{R}^3 = 3, \tag{8}$$

da cui la nullità di $\hat{R}_z$

$$N\left(\hat{R}_z\right) = 0 \Longrightarrow \ker \hat{R}_z = \{0\}, \tag{9}$$

e quindi la non singolarità di $\hat{R}_z$.