

Volume di un solido di rotazione

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Consideriamo un dominio D limitato e misurabile contenuto nel semipiano xz . In particolare:

$$D \subset \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < +\infty, 0 \leq z < +\infty\} \quad (1)$$

Sia T il solido generato dalla rotazione di D di un angolo 2π attorno all'asse z (fig. 1). La rotazione attorno all'asse z suggerisce di passare alle coordinate cilindriche (r, φ, z) . Per

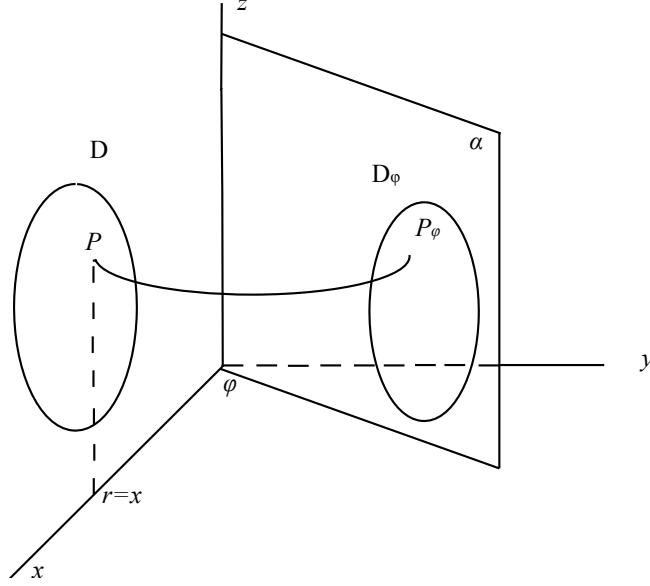


Figura 1: Rotazione di D attorno all'asse z

una rotazione di un angolo φ , il dominio si porta in D_φ , mentre il generico punto $P(x, 0, z)$ passa in $P_\varphi(r, \varphi, z)$. Il solido T corrisponde - nello spazio r, φ, z - a un cilindro U di base D , altezza 2π e generatrici parallele al piano coordinato $r\varphi$:

$$U = \{(r, \varphi, z) \mid (r, z) \in D_\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad (2)$$

come possiamo vedere in figura 2.

Tale dominio è normale rispetto al piano coordinato rz , per cui:

$$\text{mis}T = \text{mis}U = \iiint_U r dr d\varphi dz \quad (3)$$

giacché passando dalle coordinate cartesiane (x, y, z) nelle coordinate cilindriche, l'elemento di volume cambia come

$$dx dy dz \rightarrow r dr d\varphi dz$$

Dalla (2) vediamo che U è un dominio normale rispetto al piano coordinato rx , per cui utilizzando le formule di riduzione, si ha:

$$\text{mis}U = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{D_\varphi} r dr dz = 2\pi \iint_{D_\varphi} r dr dz \quad (4)$$

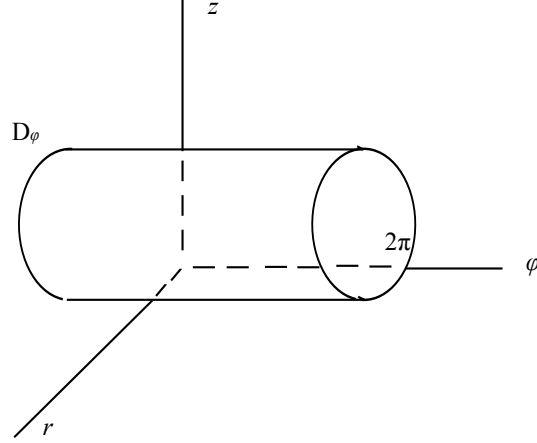


Figura 2: Dominio U corrispondente al dominio T , nello spazio delle coordinate cilindriche.

Osservando che $D_\varphi = D_{\varphi=0}$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ e che per $\varphi = 0$ è $r = x$, si ha:

$$\iint_{D_\varphi} r dr dz = \iint_D x dx dz = \text{area}D \cdot x_G, \quad (5)$$

avendo utilizzato la nota formula che fornisce l'ascissa x_G del baricentro della figura piana individuata da D :

$$x_G = \frac{1}{\text{area}D} \iint_D x dx dz \quad (6)$$

Da ciò segue che il volume V del solido di rotazione è:

$$V = \text{area}D \cdot 2\pi x_G$$

Tale formula esprime il **Teorema di Guldino** per il volume dei solidi di rotazione: *nelle ipotesi fatte, il volume di T è dato dal prodotto dell'area di D per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di D in una rotazione di 2π attorno all'asse z .*