Distribuzione degli zeri della zeta di Riemann e flusso hamiltoniano

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Denotiamo con $\psi(t)$ la restrizione di $\zeta(z)$ lungo la linea critica:

$$\psi(t) = \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{1}$$

Poniamo

$$\psi(t) = q(t) + ip(t), \tag{2}$$

dove

$$q(t) = \operatorname{Re}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \; p(t) = \operatorname{Im}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \tag{3}$$

Evidentemente

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/2} n^{-it}\right)_{ext}, \tag{4}$$

dove il pedice *ext* ci ricorda che il primo membro è l'estensione olomorfa della somma della serie tra parentesi, per $\operatorname{Re} z < 1$. Tuttavia, per non appesantire la notazione scriviamo semplicemente

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/2} n^{-it} \tag{5}$$

La coppia ordinata (q, p) fornisce le coordinate canoniche di un sistema hamiltoniano a un solo grado di libertà, se e solo se esiste una funzione (lagrangiana) $L(q, \dot{q}, t)$ tale che

$$p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \tag{6}$$

Riscrivamo le (3):

$$q(t) = \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/2} n^{-it}, \; p(t) = \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/2} n^{-it}$$

Derivando la prima otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = -\operatorname{Re}\left[i\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, n^{-\left(\frac{1}{2}+it\right)}\right] \\ p = \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\left(\frac{1}{2}+it\right)} \end{cases} \tag{7}$$

Occorre eliminare t tra le precedenti equazioni.

$$\exists f \text{ non elementarmente esprimibile } \mid p = f(\dot{q}) \tag{8}$$

Segue

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q, \dot{q}, t) = f(\dot{q})$$

Integrando

$$L\left(q,\dot{q},t\right)=V\left(q,t\right)-\int f\left(\dot{q}\right)d\dot{q}$$

Cioè

$$L\left(q,\dot{q},t\right)=T\left(\dot{q}\right)+V\left(q,t\right),$$

dove il termine di energia cinetica in funzione della velocità generalizzata è:

$$T\left(\dot{q}\right)=-\int f\left(\dot{q}\right)d\dot{q} \tag{9}$$

E quindi l'hamiltoniana:

$$H\left(q,p,t\right)=p\dot{q}\left(q,p,t\right)-L\left[q,\dot{q}\left(q,p,t\right),t\right] \tag{10}$$