Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Rallentamento in un mezzo infinito, stato stazionario

Nell'ipotesi di dispersione isotropa il flusso è $\Phi(E,x)$; pertanto:

$$\int \Phi(E,x)\,dx = \Phi(E) \tag{1}$$

Generalmente è: produzione − rimozione $=\frac{\partial n}{\partial t}$. Nel caso stazionario si ha produzione = rimozione.

$$\text{produzione} = \text{termine di sorgente } S(E) + Q(E),$$

dove $Q = \frac{\text{q.tà di neutroni}}{\text{cm}^3\,\text{s}}$ aventi energia E' con probabilità $\Pi(E' \to E)$ di passare a energia E; quindi:

$$Q(E) = \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Phi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE'$$

Segue

$$\text{produzione} = S(E) + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Phi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' \tag{2}$$

$$\text{rimozione} = [\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)]\,\Phi(E) \tag{3}$$

Il bilancio si esprime dunque con

$$S(E) + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Phi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' = \Sigma(E)\,\Phi(E) \tag{4}$$

Per collisioni elastiche e dispersione isotropa si ha

$$\Pi(E' \to E)\,dE = \frac{dE}{E'(1-\alpha)} \tag{5}$$

Il flusso

$$\Phi(E) = \Phi_V(E) + \Psi(E) \tag{6}$$

dove $\Phi_V(E)$ è il flusso vergine di neutroni che non hanno subito collisioni; $\Psi(E)$ è il flusso vero di neutroni. La sorgente $S(E)$ è supposta uniformemente distribuita e sarà uguale a

$$S(E) = \Sigma(E)\,\Phi_V(E)$$

Quindi:

$$S(E) + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Phi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' = \Sigma(E)\,\Phi_V(E) + \Sigma(E)\,\Psi(E) \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Phi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' = \Sigma(E)\,\Psi(E)$$

Posto

$$\Sigma(E)\,\Psi(E) = F(E) = \text{densità dicollisione totale/unitàdienergia}$$

si ha

$$\int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\left[\Phi_V(E') + \Psi(E')\right]\Pi(E' \to E)\,dE' = F(E)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Phi_V(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E')\,\Psi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' = F(E)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} S(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' + \int_0^{+\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')}\Sigma(E')\,\Psi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' = F(E)$$

Poniamo come

$$\text{probabilità di dispersione} = h(E) = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a}$$

$$\int_0^{+\infty} h(E')\,S(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' + \int_0^{+\infty} h(E')\,F(E')\,\Psi(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' = F(E) \quad (8)$$

Supponendo che la sorgente emetta neutroni di energia costante sarà:

$$S(E) = \delta(E_0 - E) \quad (9)$$

Ricordiamo che la definizione della funzione delta di Dirac è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0) \quad (10)$$

si scriverà allora

$$F(E) = h(E_0)\,\Pi(E_0 \to E) + \int_0^{+\infty} h(E')\,F(E')\,\Pi(E' \to E)\,dE' \quad (11)$$

dove $\alpha E_0 < E < E_0$.

$$F(E) = \frac{h(E_0)}{E_0(1-\alpha)} + \int_E^{E_0} h(E')\,F(E')\,\frac{dE'}{E'(1-\alpha)} \quad (12)$$

Supponiamo ora che l'energia sia $E < \alpha E_0$. Ciò implica che i neutroni hanno già subito una dispersione. Infatti dopo la prima collisione bisogna considerare quale energia iniziale αE_0 e quale energia finale $\alpha \cdot \alpha E_0 = \alpha^2 E_0$, e così via. Allora la densità di collisione è

$$F(E) = \frac{1}{1-\alpha}\int_E^{E/\alpha} h(E')\,F(E')\,\frac{dE'}{E'} \quad (13)$$

Infatti primo integrale si annulla essendo nulla la probabilità di passare per effetto di una collisione da E_0 a $E < \alpha E_0$. I limiti di integrazione nel secondo integrale si giustificano immediatamente ricordando che un neutrone avente energia iniziale E/α (con $\alpha < 1$) rallenta fino ad una energia E. Supposto che $\Sigma_a = 0$ si ha:

$$F(E) = \frac{1}{(1-\alpha)E_0} + \frac{1}{1-\alpha}\int_E^{E_0} F(E')\,\frac{dE'}{E'} \quad (14)$$

$$\Longrightarrow F(E) = \frac{1}{1-\alpha}\int_E^{E/\alpha} F(E')\,\frac{dE'}{E'}$$

Introduciamo la letargia relativa x

$$x = \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{\ln \frac{E_0}{\alpha E_0}} \Longrightarrow x = \frac{\ln u}{\ln \frac{1}{\alpha}}$$

per cui $E = E_0 \alpha^x$. Il motivo per cui si è introdotta la letargia relativa appare evidente considerando che:

$$\begin{gathered}
\text{a energia } E_0 \text{ corrisponde } u = 0 \text{ e } x = 0 \\
\text{a energia } \alpha E_0 \text{ corrisponde } u = \ln \frac{1}{\alpha} \text{ e } x = 1 \\
\text{a energia } \alpha^2 E_0 \text{ corrisponde } u = 2 \ln \frac{1}{\alpha} \text{ e } x = 2 \\
... \\
\text{a energia } \alpha^n E_0 \text{ corrisponde } u = n \ln \frac{1}{\alpha} \text{ e } x = n
\end{gathered}$$

cioè da una scala di energie che segue una successione geometrica

$$E_0 > \alpha E_0 > \alpha^2 E_0 > ... > \alpha^n E_0,$$

con intervalli che via via infittiscono al crescere del numero di collisioni, si è passati alla scala delle letargie relative con intervalli uguali, rappresentando i numeri $1, 2, ..., n$, essenzialmente il numero di collisioni. Allora se $F(E)\, dE =$q.tà di collisioni/(cm^3 s) lo sarà anche $N(x)\, dx$

$$F(E)\, dE = -N(x)\, dx \tag{15}$$

Il segno indica che x cresce al diminuire di E. Si verifica che

$$N(x) = E \cdot F(E) \ln \frac{1}{\alpha} \tag{16}$$

Posto

$$q = \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} \tag{17}$$

si trova che

$$N(x) = q\alpha^x + q \int_0^x \alpha^{x-y} N(y)\, dy \tag{18}$$

con $0 \leq x \leq 1 \quad (\alpha E_0 < E < E_0)$.

$$N(x) = q \int_0^x \alpha^{x-y} N(y)\, dy$$

con $x > 1$ $(E < \alpha E_0)$. Il fenomeno fisico è già stato illustrato: i neutroni emessi con E_0 possono dopo la prima collisione rallentare fino a αE_0; questi dopo la seconda fino a $\alpha^2 E_0$ e così via. Perciò viene spontaneo pensare che ogni intervallo $\alpha^i E_0 ... \alpha^{i+1} E_0$ $(i = 1, 2, ...)$ sia una sorgente neutronica per il successivo.

Relativamente al primo intervallo l'espressione di $N(x)$ è:

$$\begin{aligned}
N_0(x) = q\alpha^x + q \int_0^x \alpha^{x-y} N_0(y)\, dy \Longrightarrow \frac{dN_0(x)}{dx} = \left(q - \ln \frac{1}{\alpha}\right) N_0(x) \\
\Longrightarrow \int_0^x \frac{dN_0(x)}{N_0(x)} = \int_0^x \left(q - \ln \frac{1}{\alpha}\right) dx \Longrightarrow N_0(x) = q \exp\left[\left(q - \ln \frac{1}{\alpha}\right) x\right]
\end{aligned} \tag{19}$$

Per la posizione (17):

$$N_0(x) = qe^{\alpha q x}$$

che è la densità di collisioni per l'intervallo (0...1) di letargia relativa. Consideriamo l'intervallo per x $(n \leq x \leq n+1)$ (fig. 1).

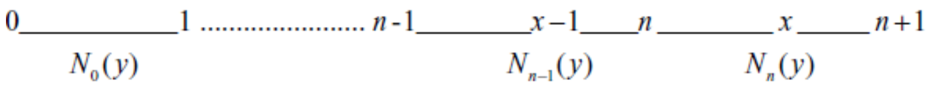


Figura 1: Intervallo per x $(n \leq x \leq n+1)$

$$N_n(x) = q\int_{x-1}^{n} \alpha^{x-y} N_{n-1}(y)\,dy + q\int_{n}^{x} \alpha^{x-y} N_n(y)\,dy \tag{20}$$

Il termine α^{x-y} è manifestamente un kernel; esso rappresenta la probabilità che neutroni di letargia y acquistino una letargia x. Si può immediatamente verificare che la (20) è esatta. Poniamo $n=1$

$$N_1(x) = q\int_{x-1}^{1} \alpha^{x-y} N_{n-1}(y)\,dy + q\int_{1}^{x} \alpha^{x-y} N_1(y)\,dy \tag{21}$$

Per $x=1$ si ottiene

$$N_1(1) = q\int_{0}^{1} \alpha^{x-y} N_0(y)\,dy \tag{22}$$

Trovandoci nel 1° intervallo usiamo la $N_0(1)$

$$N_0(1) = q\alpha + q\int_{0}^{1} \alpha^{1-y} N_0(y)\,dy = q\alpha + N_1(1) \tag{23}$$

Deriviamo ambo i membri della (20) si ottiene l'equazione alle differenze finite

$$N_n'(x) = \left(q - \ln\frac{1}{\alpha}\right) N_n(x) - \alpha q N_{n-1}(x-1) \tag{24}$$

dove

$$q - \ln\frac{1}{\alpha} = \frac{N_0'(x)}{N_0(x)} \tag{25}$$

Dividendo ambo i membri della (24) per $N_0(x)$

$$\frac{N_n'(x)}{N_0(x)} = \frac{N_0'(x)}{N_0^2(x)} N_n(x) - \alpha q \frac{N_{n-1}(x)}{N_0(x)} \Longrightarrow \frac{N_n' N_0}{N_0^2} - \frac{N_0' N_n}{N_0^2} N_n(x) = -\alpha q \frac{N_{n-1}(x-1)}{N_0(x)} \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{N_n}{N_0}\right) = -\alpha q \frac{N_{n-1}(x-1)}{N_0(x)} \frac{N_0(x-1)}{N_0(x-1)} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{N_n}{N_0}\right) = -\alpha q \frac{N_0(x-1)}{N_0(x)} \frac{N_{n-1}(x-1)}{N_0(x-1)}$$

Posto

$$P_n(x) = \frac{N_n(x)}{N_0(x)}$$

si ha

$$P_n'(x) = -\alpha q \frac{N_0(x-1)}{N_0(x)} P_{n-1}(x) \tag{27}$$

dove

$$N_0(x) = q\exp(\alpha q x)\,, \quad N_0(x-1) = N_0(x)\exp(-\alpha q) \tag{28}$$

$$P'_n(x) = -\alpha q \exp(-\alpha q) P_{n-1}(x-1) \tag{29}$$

Ricordiamo che

$$q = \frac{1}{1-\alpha}\ln\frac{1}{\alpha},$$

quindi la (29) diventa

$$P'_n(x) = -qe^{-q}P_{n-1}(x-1) \tag{30}$$

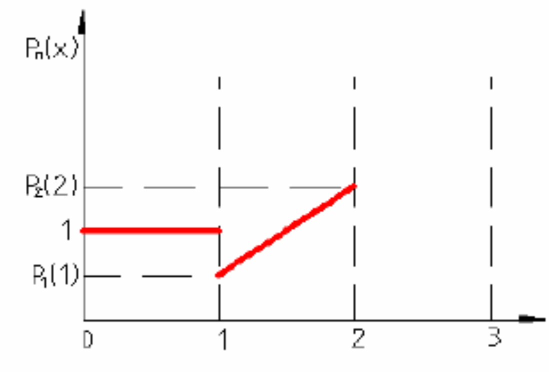
Poniamo $n=1 \Longrightarrow P_0(x-1)=1$ essendo $P_0(x)=\frac{N_0(x)}{N_0(x)}$. Si ottiene così

$$P'_1(x) = -qe^{-q} \Longrightarrow \int dP_1(x) = -\int qe^{-q}dx \Longrightarrow P_1(x) = -qe^{-q}(x-1) + \text{cost} \tag{31}$$

perché la variabile è nel 1° intervallo. Determiniamo la costante d'integrazione

$$P_1(1) = \frac{N_1(1)}{N_0(1)} = \frac{N_1(1)}{\alpha q + N_1(1)} = \text{cost} \Longrightarrow P_1(x) = -qe^{-q}(x-1) + \left(1-e^{-q}\right) \tag{32}$$

In generale $P_n(x)$ sono polinomi di grado n e argomento $(x-n)$ (fig. 1).



Possiamo ora dimostrare che dopo due o tre intervalli x la densità di collisione $N(x)$ è una costante. Per $x>1$ si ha

$$N(x) = q\int_{x-1}^{x}\alpha^{x-y}N(y)\,dy \tag{33}$$

Posto $N(x)$ =costante, nel secondo membro è $N(y)=1$

$$q\int_{x-1}^{x}\alpha^{x-y}N(y)\,dy = q\alpha^x\int_{x-1}^{x}\alpha^{-y}dy = q\alpha^x\int_{x-1}^{x}e^{\ln\alpha^{-y}}dy = -q\frac{1}{\ln\alpha}(1-\alpha) = 1 \tag{34}$$

Allora la costante rappresenta una soluzione asintotica, la quale è il valor medio $\overline{N(x)}$. Tale grandezza è il numero medio di collisioni necessarie per passare da E a αE e quindi per passare da $(x-1)$ a x.

$$n = \frac{\ln\frac{E}{\alpha E}}{\xi} = \frac{\ln\frac{1}{\alpha}}{\xi} = \overline{N(x)} \tag{35}$$

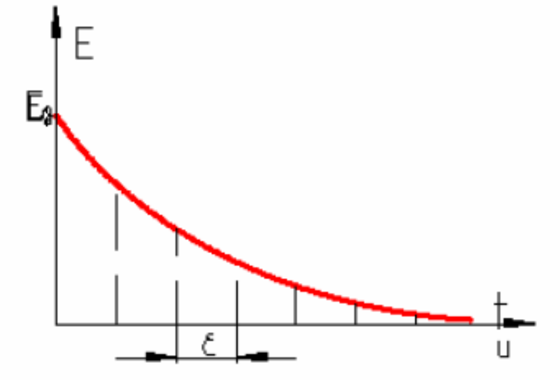


Figura 2: Andamento dell'energia in funzione della variabile $u = x \ln \frac{1}{\xi}$.

Numero medio di collisioni per intervallo unitario di letargia $u = x \ln \frac{1}{\xi}$ (si veda il grafico di fig. 2).

$$E = E_0 e^{-u} \Longrightarrow E - \Delta E = E_0 e^{-(u+1)} \Longrightarrow E - \Delta E = E_0 e^{-u} e^{-1} = E e^{-1} \tag{36}$$

$$n = \frac{\ln \frac{E}{E - \Delta E}}{\xi} = \frac{\ln \frac{E}{E e^{-1}}}{\xi} = \frac{1}{\xi} = \overline{N(u)} \tag{37}$$

Allora ricordando che

$$N(x) = EF(E) \ln \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow F(E) = \frac{1}{\xi E} = \Sigma(E) \Psi(E) \tag{38}$$

$$\Psi(E) = \frac{1}{\xi E \Sigma(E)} \tag{39}$$

cioè la densità di collisione totale per intervallo unitario di energia varia con legge $1/E$.