Quesito maturità 2017

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

In uno dei quesiti all'esame di maturità (liceo scientifico, prova di matematica), è assegnata una funzione:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{se } x \in [0,1] \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & \text{se } x \in [1,3] \\ \frac{x^2}{2} - 4x + 8, & \text{se } x \in [3,4] \end{cases}, \tag{1}$$

il cui grafico è riportato in fig. 1

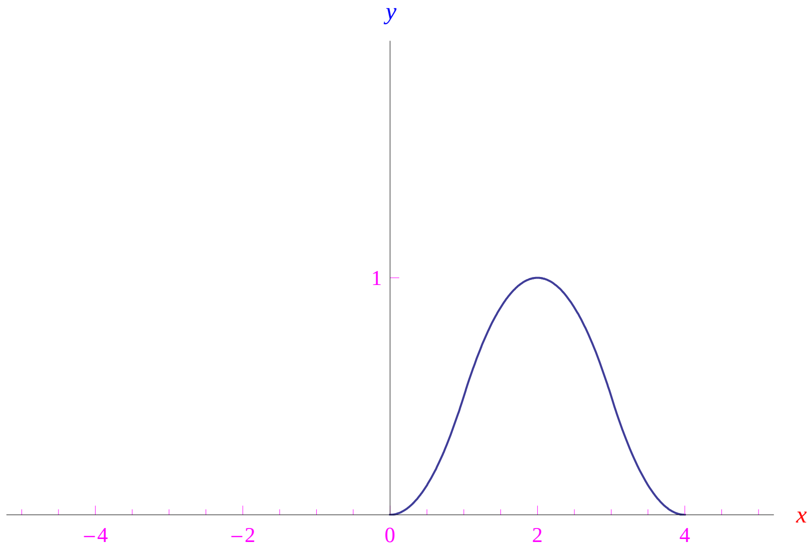

Figura 1: Grafico della funzione $h(x)$.

Si chiede di calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di 2π attorno all'asse y del grafico della restrizione di $h(x)$ a $[0,3]$.

Applicando il metodo dei gusci cilindrici, il volume richiesto è

$$V = 2\pi \int_0^3 x h(x)\, dx = \frac{83}{12}\pi \tag{2}$$

Per disegnare il solido con Mathematica, possiamo applicare il formalismo delle matrici di rotazione. A tale scopo ridefiniamo gli assi coordinati, considerando una terna $Oxyz$ con $z = h(y)$ ove l'espressione della funzione è data dalla (1) che ammette la rappresentazione parametrica

$$x = 0, \; y = \theta, \; z = h(\theta), \quad \theta \in [0,3] \tag{3}$$

Quindi rispetto alla terna $Oxyz$ il generico punto della curva sottoposta a rotazione è rappresentato dal vettore colonna:

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \\ h(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0,3], \tag{4}$$

mentre la matrice di rotazione attorno all'asse z si scrive:

$$\mathcal{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Il generico punto della superficie del solido generato dalla rotazione di D attorno all'asse z è rappresentato dal vettore colonna

$$X'(\varphi,\theta)=\mathcal{R}_z(\varphi)\,X(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \theta\\ h(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\theta\sin\varphi\\ \theta\cos\varphi\\ h(\theta)\end{pmatrix}, \tag{6}$$

che fornisce una rappresentazione parametrica della superficie del solido:

$$x=-\theta\sin\varphi,\ y=\theta\cos\varphi,\ z=h(\theta), \quad \varphi\in[0,2\pi],\,\theta\in[0,3] \tag{7}$$

In figura 2 è disegnata la superficie .

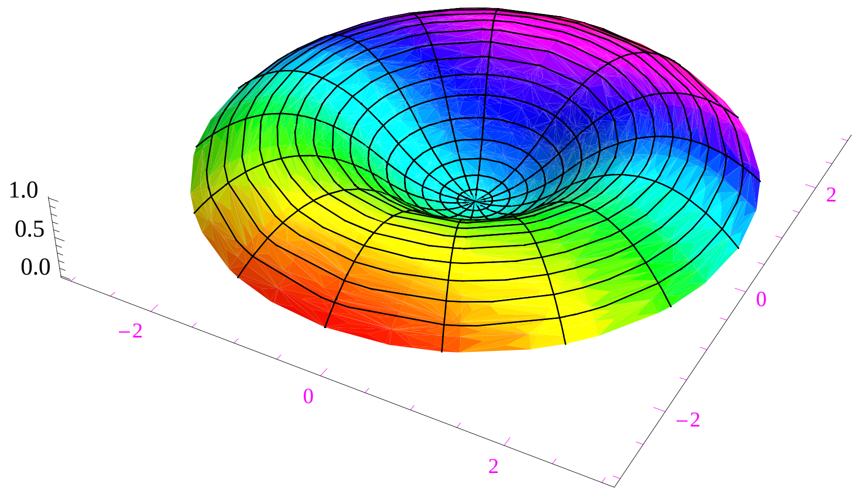

Figura 2: Solido generato dalla rotazione del grafico della $h(x)$ per $x\in[0,3]$.