Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Fisica Teorica – 2017

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Il white noise quale generatore di stati quantici

Marcello Colozzo

Immagine tratta dal seguente sito web

Indice

1 Operazione di misura di una osservabile quantistica

Denotiamo con S_q un sistema quanto-meccanico a due stati nel senso che lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ associato a S_q è 2-dim. Se $\hat{A}$ è l'operatore hermitiano rappresentativo di una osservabile A relativa a S_q, nell'ipotesi di non degenerazione dello spettro $\sigma\left(\hat{A}\right)$, l'equazione agli autovalori può essere scritta nella forma:

$$\begin{cases} \hat{A}\left|0\right\rangle = a_0\left|0\right\rangle \\ \hat{A}\left|1\right\rangle = a_1\left|1\right\rangle \end{cases} \tag{1}$$

Assumendo normalizzati gli autovettori di $\hat{A}$, segue che $\{\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{H}$.

Come è noto, lo stato quanto-meccanico di S_q è descritto da un vettore funzione del tempo $\left|\psi(t)\right\rangle \in \mathcal{H}$ soluzione dell'equazione di Schrödinger che in forma operatoriale si scrive:

$$\frac{d}{dt}\left|\psi\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\left|\psi\right\rangle, \tag{2}$$

ove $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano di S_q. Più precisamente, lo stato quanto-meccanico di S_q risolve univocamente il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left|\psi\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\left|\psi\right\rangle \\ \left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi_0\right\rangle \in \mathcal{H} \end{cases}, \tag{3}$$

essendo t_0 un istante iniziale dato. Supponendo che S_q sia un sistema isolato, si ha che $\hat{H}$ non dipende esplicitamente dal tempo t, e ciò ci consente di integrare l'equazione differenziale ordinaria (2) per separazione di variabili. In definitiva, l'unica soluzione del problema (3) si scrive:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0)\left|\psi_0\right\rangle$$

dove

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \tag{4}$$

è un operatore manifestamente unitario, noto come **operatore di evoluzione temporale** associato al sistema S_q di hamiltoniano $\hat{H}$.

Conclusione 1 *L'evoluzione temporale della funzione d'onda di un sistema quantistico è una processo deterministico. Più precisamente, è una trasformazione unitaria dello spazio di Hilbert in sè, associato al sistema.*

Supponiamo ora che l'osservabile A sia compatibile con l'osservabile energia, i.e.

$$\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = \hat{0} \tag{5}$$

Segue che gli operatori $\hat{A}, \hat{H}$ ammettono un sistema di autovettori simultanei, il che si traduce nell'esistenza di un sistema di autostati simultanei delle corrispondenti osservabili. Cioè

$$\begin{cases} \hat{A}\left|n, E_n\right\rangle = a_n\left|n, E_n\right\rangle \\ \hat{H}\left|n, E_n\right\rangle = E_n\left|n, E_n\right\rangle \end{cases}, \quad n \in \{0, 1\} \tag{6}$$

Per non appesantire la notazione, riscriviamo

$$\begin{cases} \hat{A}\left|n\right\rangle = a_n\left|n\right\rangle \\ \hat{H}\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle \end{cases}, \quad n \in \{0, 1\} \tag{7}$$

Se S_q è inizialmente preparato nello stato iniziale

$$|\psi_0\rangle = c_0^{(0)} |0\rangle + c_1^{(0)} |1\rangle , \tag{8}$$

ovviamente normalizzato

$$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1 \Longleftrightarrow \left|c_0^{(0)}\right|^2 + \left|c_1^{(0)}\right|^2 = 1 \tag{9}$$

Lo stato di S_q al tempo t è l'evoluto temporale di (8):

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \left(c_0^{(0)} |0\rangle + c_1^{(0)} |1\rangle\right) \\ &= c_0^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |0\rangle + c_1^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |1\rangle\end{aligned}$$

Cioè

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t) |0\rangle + c_1(t) |1\rangle , \tag{10}$$

essendo

$$c_0(t) = c_0^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}, \quad c_1(t) = c_1^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)},$$

da cui segue che il vettore (10) è normalizzato a 1 (e ciò è una conseguenza dell'unitarietà dell'evoluzione temporale).

Se nell'istante $t_1 \geq t_0$ eseguiamo un'operazione di misura dell'energia (o dell'osservabile A) di S_q, si ha:

$$|\psi(t_1)\rangle \underset{\text{mis } E}{\longrightarrow} |n\rangle , \quad n \in \{0, 1\} \tag{11}$$

che si legge: in seguito all'operazione di misura il vettore di stato $|\psi(t_1)\rangle$ *collassa* in uno degli autostati dell'osservabile che si sta misurando. Il corrispondente autovalore è il risultato della misura. Per essere più specifici, supponiamo di ottenere:

$$|\psi(t_1)\rangle \underset{\text{mis } E}{\longrightarrow} |0\rangle , \tag{12}$$

per cui

$$|c_1(t)|^2 = \begin{cases} \left|c_1^{(0)}\right|^2 > 0, & \text{se } t_0 \leq t < t_1 \\ 0, & \text{se } t > t_1 \end{cases} , \tag{13}$$

cioè t_1 è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione reale $|c_1(t)|^2$, come mostrato in fig. 1.

Conclusione 2 *L'operazione di misura di un'osservabile quantistica è un processo aleatorio, poiché conosciamo solo la probabilità di ottenere un determinato risultato. Tale processo introduce una discontinuità di prima specie nei coefficienti della sovrapposizione lineare del vettore di stato in termini di autostati dell'osservabile sottoposta a misura.*

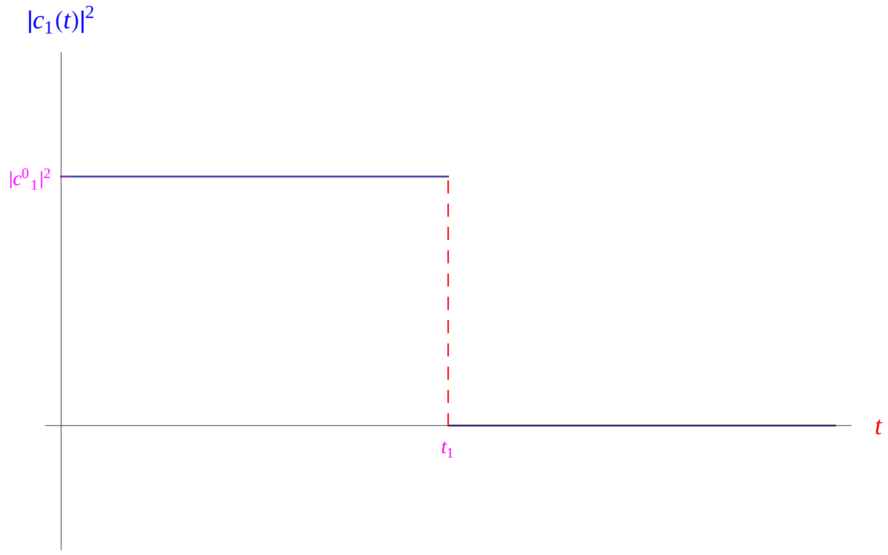

Figura 1: Andamento di $|c_1(t)|^2$ in funzione del tempo. Nell'istante di misura, il vettore di stato si riduce all'autostato $|0\rangle$, per cui $|c_1(t)|^2$ va istantaneamente a zero.

2 L'operazione di misura simulata da un white noise

Per quanto precede, l'evoluzione dinamica di S_q è caratterizzata da due distinti processi, di cui il primo denominato con U è deterministico (evoluzione libera del vettore di stato), mentre il secondo che indichiamo con R, è aleatorio (operazione di misura, quale riduzione del vettore di stato in uno dei vettori di base).

Dal momento che il processo R non dipende dal tempo, nel senso che possiamo eseguire una misura in un istante arbitrario, riscriviamo la (10) che esprime lo sviluppo del vettore di stato a tutti i tempi in termini dei vettori di base, omettendo la dipendenza funzionale dalla variabile reale t:

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle , \tag{14}$$

dove, ricordiamolo, i coefficienti complessi c_0, c_1 verificano la condizione di normalizzazione:

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \Longrightarrow || |\psi\rangle ||^2 = 1 \tag{15}$$

La fig 2 illustra la combinazione lineare (14)

Per quanto precede, una misura dell'osservabile A (o H) è rappresentata dal processo R:

$$|\psi\rangle \underset{\text{mis}}{\longrightarrow} |n\rangle , \quad n \in \{0, 1\} \tag{16}$$

Si osservi che 0 e 1 sono simboli convenzionali che comunque rappresentano numeri con le appropriate unità di misura (si pensi ad una misura dell'energia) o differenti stati di spin (ad esempio se S_q è un sistema di spin 1/2, gli autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono gli stati di spin up $|\uparrow\rangle$ e down $|\downarrow\rangle$).

Ricordiamo che $|\psi\rangle$ è una coppia ordinata di numeri complessi:

$$|\psi\rangle = (c_0, c_1) \in \mathbb{C}^2, \tag{17}$$

ove lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ (sul campo complesso $\mathbb{C}$) è strutturato come spazio di Hilbert o meglio come spazio unitario, giacché la prima denominazione è riservata agli spazi infinito-dimensionali [1]. I numeri complessi c_0, c_1 sono le ampiezze di probabilita:

$$|c_n|^2 = \text{ probabilità che una misura fornisca l'autovalore } a_n$$

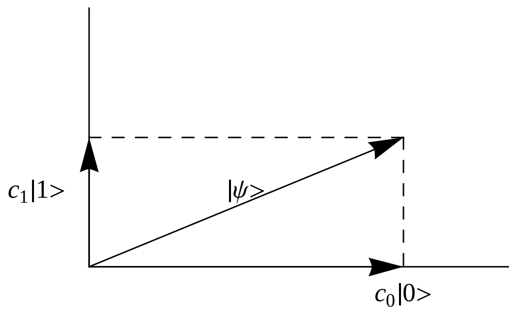

Figura 2: Il vettore di stato (14) quale combinazione lineare dei vettori di base.

In altre parole, l'intero naturale n determina il risultato della misura, ed è manifestamente una variabile aleatoria.

Congettura 3 *Il carattere aleatorio della variabile n, è ereditato da una "variabile interna" λ. Precisamente:*

$$n = f(\lambda), \tag{18}$$

dove

$$f : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \tag{19}$$

Non conoscendo f, poniamo:

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(\lambda) = 0\}, \quad \Lambda_1 = \mathbb{R} - \Lambda_0 \tag{20}$$

Cioè Λ_0 è l'insieme degli "zeri" della funzione f, ove le virgolette ci ricordano la natura convenzionale dei simboli 0 e 1. Dal momento che non conosciamo l'espressione analitica di f, non possiamo determinare l'insieme Λ_0, ma al più una variabile aleatoria $\chi_0(\lambda)$ tale che preso ad arbitrio $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la grandezza differenziale

$$dN_0 = \chi_0(\lambda_0)\, d\lambda, \tag{21}$$

esprime il numero di zeri che cadono nell'intervallo infinitesimo $[\lambda_0, \lambda_0 + d\lambda]$. Chiamiamo $\chi_0(\lambda)$ densità del numero di zeri della funzione (19).

Abbiamo, dunque, un processo aleatorio $\chi_0(\lambda)$ e come tale descritto da una assegnata densità di probabilità $P_0(\lambda)$ che ci consente di determinare la media di insieme

$$\langle \chi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_0(\lambda)\, P_0(\lambda)\, d\lambda$$

e la funzione di autocorrelazione

$$\varphi_0(\mu) = \langle \chi_0(\lambda)\, \chi_0(\lambda + \mu) \rangle,$$

che per il Teorema di Wiener–Khintchine è la trasformata di Fourier dello spettro di potenza $w_0(k)$ della variabile aleatoria $\chi_0(\lambda)$:

$$\varphi_0(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} w_0(k)\, e^{-ik\mu} dk$$

E quindi

$$w_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\mu)\, e^{ik\boldsymbol{\mu}} d\mu \tag{22}$$

Ad esempio, se lo spettro di potenza è piatto:

$$w_0(k) \equiv Ak_0,$$

dove A è una costante, allora i valori assunti da $\chi_0(\lambda)$ sono scorrelati al 100%. Come è noto, in questo caso $\chi_0(\lambda)$ è un white noise, come illustrato in fig 3.

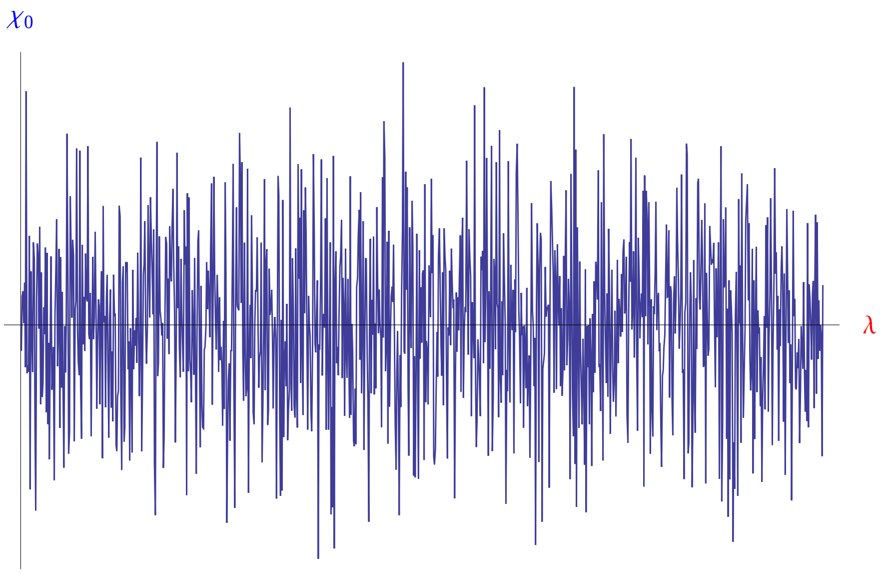

Figura 3: Andamento della densità degli zeri $\chi_0(\lambda)$ quale variabile aleatoria con spettro di potenza piatto.

3 Conclusioni

In questo modello di sistema quantistico a due stati, lo stato quantico $|n\rangle$ dipende da una "variabile interna" λ la cui funzione di distribuzione è un white noise. A sua volta la variabile λ potrebbe rappresentare lo stato quantico di un clone S'_q di S_q, spazialmente separato ed entangled a S_q.

Riferimenti bibliografici

[1] Cattaneo Gasparini I., *Strutture algebriche ed operatori lineari*, Veschi.

[2] Caldirola P., *Dalla microfisica alla macrofisica*

[3] Sakurai. *Meccanica Quantistica moderna*

[4] Caldirola P. *Introduzione alla Fisica Teorica*

[5] Onofri. *Istituzioni di Fisica Teorica*