Proprietà notevoli degli operatori hermitiani

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

In alcune lezioni precedenti abbiamo introdotto la nozione di operatore hermitiano in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Dimostriamo ora il seguente teorema:

Teorema 1 *Gli autovalori di un operatore hermitiano sono reali:*

$$\sigma\left(\hat{A}\right) \subset \mathbb{R}, \qquad \forall \hat{A} \in end\left(\mathcal{H}\right) \mid \hat{A} = \hat{A}^{\dagger} \tag{1}$$

Gli autoket di un operatore hermitiano appartenenti ad autovalori distinti, sono ortogonali.

Dimostrazione. Sia $\hat{A}$ un operatore hermitiano. Scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$\hat{A}\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle \tag{2}$$

Ricordiamo che per definizione di autovettore, riesce $\left|a\right\rangle \neq 0_{\mathcal{H}}$, dove $0_{\mathcal{H}}$ denota il vettore nullo di $\mathcal{H}$. Risulta:

$$\hat{A} = \hat{A}^{\dagger} \Longrightarrow \left(\left\langle a\right| \hat{A}\right) \cdot \left|a\right\rangle = \left\langle a\right| \cdot \left(\underbrace{\hat{A}\left|a\right\rangle}_{a\left|a\right\rangle}\right) \tag{3}$$

Ma $\left\langle a\right| \hat{A}$ è il bra duale del ket $\hat{A}^{\dagger}\left|a\right\rangle = \hat{A}\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle$, quindi:

$$\left\langle a\right| \hat{A} = \left\langle a\right| a^{*}, \tag{4}$$

che sostituita nella (3):

$$a^{*}\left\langle a|a\right\rangle - a\left\langle a|a\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(a^{*} - a\right)\left\langle a|a\right\rangle = 0 \underset{\left\langle a|a\right\rangle \neq 0}{\Longrightarrow} a^{*} = a$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, prendiamo ad arbitrio due autoket appartenenti ad autovalori distinti:

$$\begin{array}{c} \hat{A}\left|a'\right\rangle = a'\left|a'\right\rangle \\ \hat{A}\left|a''\right\rangle = a''\left|a''\right\rangle \end{array}, \quad \forall\, a', a'' \in \sigma\left(\hat{A}\right), \quad a' \neq a'' \tag{5}$$

Segue

$$\left\langle a''\left|\hat{A}\right| a'\right\rangle = \left\langle a''\right| \cdot \left(\underbrace{\hat{A}\left|a'\right\rangle}_{a'\left|a'\right\rangle}\right) = a'^{*}\left\langle a''|a'\right\rangle \underset{a' \in \mathbb{R}}{=} a'\left\langle a''|a'\right\rangle \tag{6}$$

D'altra parte:

$$\left\langle a''\left|\hat{A}\right| a'\right\rangle \underset{\hat{A}=\hat{A}^{\dagger}}{=} \left(\underbrace{\left\langle a''\right| \hat{A}}_{=\left\langle a''\right| a''}\right) \cdot \left|a'\right\rangle = a''\left\langle a''|a'\right\rangle \tag{7}$$

Le (6)-(7) compongono il sistema:

$$\begin{cases} a'\left\langle a''|a'\right\rangle = \left\langle a''\left|\hat{A}\right| a'\right\rangle \\ a''\left\langle a''|a'\right\rangle = \left\langle a''\left|\hat{A}\right| a'\right\rangle \end{cases} \tag{8}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\left(a' - a''\right)\left\langle a''|a'\right\rangle = 0 \underset{a' \neq a''}{\Longrightarrow} \left\langle a''|a'\right\rangle = 0,$$

onde l'asserto. ■

Riferimenti bibliografici

[1] Sakurai J.J., 1990. *Meccanica quantistica moderna.* Zanichelli

[2] Cattaneo Gasparini, 1990. *Strutture algebriche. Operatori lineari.* Veschi