Esercizio 38 (Mandò)

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *(Nel testo è il n. 38, pag. 70)*

Una bocca da fuoco è capace di lanciare un proiettile dal punto O, con velocità iniziale $v_0 = 240\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$ e con angolo di lancio θ variabile. Trascurando la resistenza dell'aria, determinare:

1. *la gittata massima della bocca da fuoco;*
2. *l'angolo di lancio θ occorrente per raggiungere un bersaglio B situato sull'orizzonte del pezzo e ad una distanza di $3\,\mathrm{km}$;*
3. *l'angolo di lancio θ necessario per colpire un bersaglio F di coordinate $x_1 = 3\,\mathrm{km}$, $y_1 = 150\,\mathrm{m}$ (origine degli assi in O, asse x orizzontale, asse y verticale verso l'alto).*

   Formule utili:

$$x = (v_0 \cos\theta)\, t,\ \ y = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = x \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

$$\textit{gittata: } R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

Soluzione

Quesito 1

Dalla formula della gittata:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta,$$

si ha che il massimo è assunto manifestamente per $\theta = \frac{\pi}{4}$ i.e. $45°$ sul piano orizzontale.

Quesito 2

Dobbiamo imporre il passaggio dell'arco di parabola

$$y = x \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

per il punto $(3 \cdot 10^3\,\mathrm{m}, 0)$ o ciò che è lo stesso, determinare l'angolo di lancio che riproduce una gittata $R_0 = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$:

$$\sin 2\theta_0 = \frac{gR_0}{v_0^2} = 0.51042,$$

a cui corrispondono due valori dell'angolo

$$\theta_0 = \begin{cases} 15°\ 21' \\ 74°\ 39' \end{cases}$$

Abbiamo quindi due traiettorie possibili, illustrate in fig. 1.

Quesito 3

Qui il bersaglio è $F(x_1, y_1)$ con $x_1 = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$, $y_1 = 150\,\mathrm{m}$. Dobbiamo imporre il passaggio della traiettoria parabolica per tale punto, per cui

$$y_1 = x_1 \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2} \left(1 + \tan^2\theta\right) x_1^2,$$

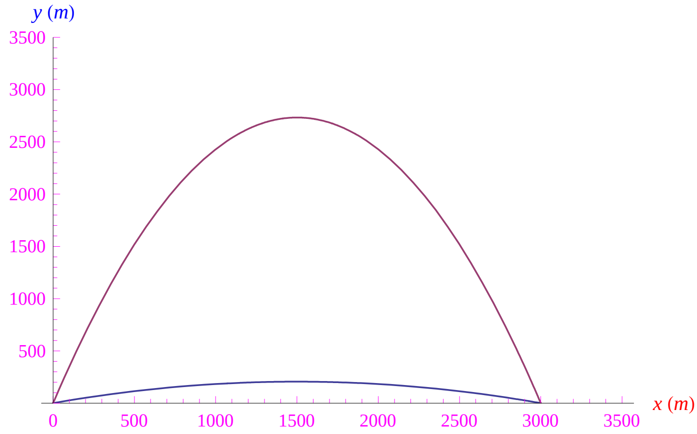

Figura 1: Quesito 2 dell'esercizio ??.

da cui

$$x_1 g \tan\theta - 2x_1 v_0^2 \tan\theta + g x_1^2 + 2v_0^2 y_1 = 0,$$

che è un'equazione quadratica in $\tan\theta$. Inserendo i dati numerici:

$$\tan\theta = \frac{3.918 \pm \sqrt{3.918^2 - 4 \cdot 1.1959}}{2} = \begin{cases} 3.5843 \\ 0.3336 \end{cases}$$

Quindi gli angoli di lancio

$$\theta_1 = 18^\circ\ 27',\ \theta_2 = 74^\circ\ 25' \tag{1}$$

In fig. 1 le traiettorie corrispondenti ai predetti angoli di lancio.

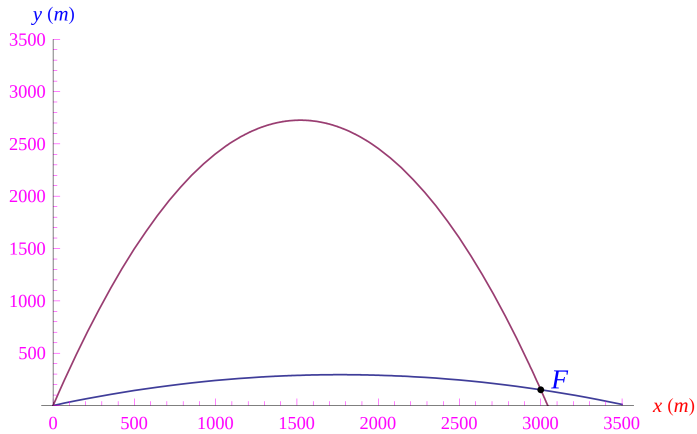

Figura 2: Quesito 3 dell'esercizio ??.