Immaginiamo di essere in un poligono di tiro. Disponiamo di tre fucili:

1. fucile convenzionale che spara proiettili a velocità $\vec{v}$ costante;
2. fucile a raggio laser;
3. fucile a fascio di neutrini superluminali.

Dimostrare che nel caso 3 esiste un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale il bersaglio viene colpito *prima* che il proiettile venga sparato.

***

Assumiamo come sistema di riferimento inerziale (K) un sistema di coordinate cartesiane in cui il fucile è in quiete. Orientiamo l'asse x nella direzione di $\vec{v}$, assumendo come origine il punto in cui viene sparato il proiettile. Indichiamo con t il tempo misurato da un orologio di K. Il proiettile colpirà il bersaglio nell'istante:

$$t_1 = \frac{x_1}{v} \tag{1}$$

essendo x_1 l'ascissa del bersaglio. Qui abbiamo posto $t = 0$ l'istante in cui viene sparato il proiettile. Nel formalismo della Relatività Ristretta abbiamo la seguente coppia di eventi:

$$O\,(0,0)\,,\ \ P_1\,(ct_1, x_1) \tag{2}$$

Si noti che non stiamo considerando le rimanenti coordinate spaziali y, z, poichè il moto è unidimensionale.

L'intervallo tra i due eventi (2) è definito da:

$$s_1^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2$$

Tenendo conto della (1):

$$s_1 = ct_1\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{3}$$

Come ci si aspettava è $s_1^2 > 0$, giacchè P_1 è nel cono-luce di O.

Ora consideriamo un sistema di riferimento inerziale $K'\,(O'x'y'z')$ che si muove con velocità $\vec{V} = (V, 0, 0)$ rispetto a K. L'intervallo tra gli eventi O' e $P_1'\,(ct_1', x_1')$ è:

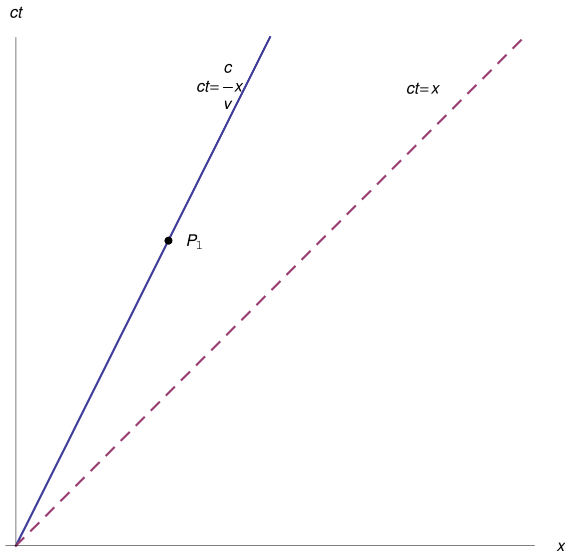

Figure 1: I due eventi (2) nello spazio-tempo bidimensionale.

$$s_1' = ct_1'\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = s_1,$$

poichè s è relativisticamente invariante. Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} t_1' &= \frac{t_1 - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= \frac{t_1\left(1 - \frac{Vv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{4}$$

Risulta $\frac{Vv}{c^2} < 1$, $\forall V, v \in (0, c)$, da cui:

$$t_1 > t_1' \tag{5}$$

Cioè comunque ci mettiamo in un sistema di riferimento inerziale K' che si muove rispetto al sistema inerziale K in cui il fucile è in quiete, vedremo colpire il bersaglio *dopo* che il proiettile è stato sparato.

Questo è un risultato noto: l'ordine cronologico di una qualunque coppia di eventi si conserva (passando da K a K') se e solo se i due eventi sono causalmente connessi o, ciò che è lo stesso, sono separati da un intervallo del genere tempo ($s^2 > 0$).

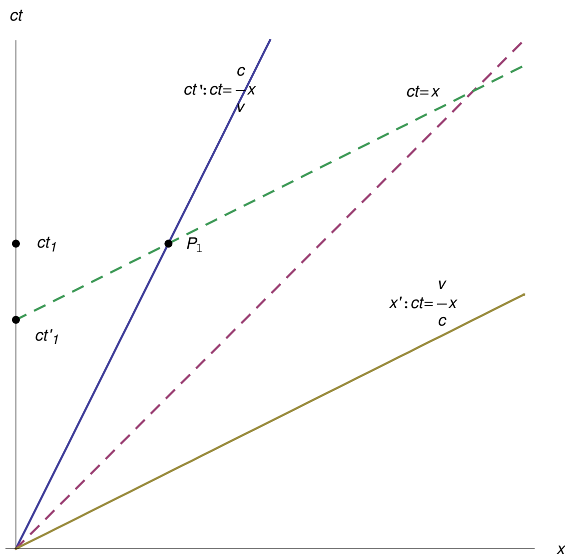

Figure 2: I due eventi (2) sono separati da un intervallo del genere tempo. Un osservatore K' in moto rispetto a K, misurerà un tempo $t_1' < t_1$, ma comunque maggiore di zero. Si conserva quindi l'ordine cronologico degli eventi.

Nel caso 2 è $v = c$, per cui la (4) fornisce:

$$t_1' = t_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} \Longrightarrow t_1' \in (0, t_1)$$

Passiamo al caso 3: $v > c$. Ora gli eventi sono separati da un intervallo del genere spazio:

$$s_1^2 = -c^2 t_1^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) < 0$$

La (4) si scrive:

$$t_1' = \frac{t_1 \left(1 - \frac{V}{c}\beta\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{6}$$

essendo $\beta = \frac{v}{c} > 1$. Risulta:

$$t_1' < 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{V}{c}\beta < 0 \Longleftrightarrow V > \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}$$

Cioè:

$$\forall V \in \left(\frac{c}{v^2}, c\right), \;\; t_1' < 0$$

Ne concludiamo che per un osservatore inerziale K' che si muove con velocità $V \in \left(\frac{c}{v^2}, c\right)$, il bersaglio viene colpito *prima* che il proiettile venga sparato.

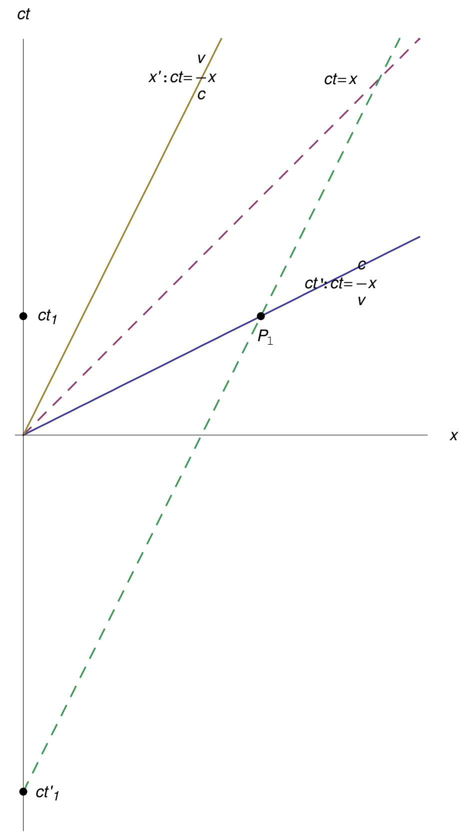

Figure 3: I due eventi (2) sono causalmente sconnessi, in quanto P_1 appartiene alla regione di allontamento assoluto rispetto a O. L'ordinamento cronologico è invertito: nel sistema di riferimento K' il proiettile (fascio di particelle superluminali) colpisce il bersaglio nell'istante $t_1' < 0$, cioè prima che venga sparato.