Prodotto tensoriale di due spazi vettoriali

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_j \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\} \Longrightarrow x^i = \delta^i_j$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_h \in \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\} \Longrightarrow y^k = \delta^k_h$$

Segue

$$T(\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_h) = T_{ik}\delta^i_j \delta^k_h = T_{jh} \tag{1}$$

Cioè i coefficienti T_{ik} della forma quadratica

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T_{ik}x^i y^k$$

sono gli elementi di matrice dell'applicazione bilineare

$$T : E_n \times F_m \longrightarrow \mathbb{K},$$

rispetto alle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_k\}$ di E_n e F_m rispettivamente:

$$T \doteq (T_{ik}), \quad i = 1, 2, ..., n, \; k = 1, 2, ..., m$$

ovvero la matrice $n \times m$:

$$T \doteq \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & ... & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & ... & T_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ T_{n1} & T_{n2} & ... & T_{nm} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Procedendo sulla falsariga delle forme lineari, deduciamo che gli elementi di matrice $T_{ik} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$ sono le componenti del tensore T. Ma rispetto a quale base? Nel caso di una forma lineare ϕ avevamo lo spazio duale E^* e la base duale θ^i, per cui $\phi = \phi_i \theta^i$. Nel caso di una forma bilineare dobbiamo costruire un ente che sia l'analogo di

$$E^*_n = \hom(E_n, \mathbb{K})$$

Dobbiamo cioè definire un "qualche" spazio prodotto di E^*_n e F^*_m. Poniamo per definizione:

$$E^*_n \otimes F^*_m \overset{def}{=} \{T \mid T : E_n \times F_m \longrightarrow \mathbb{K}, \quad T \text{ è bilineare}\} \tag{3}$$

In altri termini, denotiamo con $E^*_n \otimes F^*_m$ la totalità delle forme bilineari definite in $E_n \times F_m$.

Definizione 1 *L'insieme $E^*_n \otimes F^*_m$ si dice* **prodotto tensoriale** *di E^*_n per F^*_m.*

Osservazione 2 *La scelta più ovvia sembrerebbe $E_n \times F_m$. L'introduzione dell'operatore $\otimes$ apparirà chiara più avanti.*

Introduciamo in $E^*_n \otimes F^*_m$ una legge di composizione interna:

$$\begin{aligned} &+ : (E^*_n \otimes F^*_m) \times (E^*_n \otimes F^*_m) \to E^*_n \otimes F^*_m \\ &+ : (T', T'') \in E^*_n \otimes F^*_m \to (T' + T'') \in E^*_n \otimes F^*_m, \end{aligned} \tag{4}$$

così definita:

$$\forall T', T'' \in E^*_n \otimes F^*_m, \; (T' + T'')(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T''(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times F_m \tag{5}$$

La (5) si chiama **addizione di tensori**, e verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà commutativa**
$$T' + T'' = T'' + T', \quad \forall T', T'' \in E_n^* \otimes F_m^* \tag{6}$$
2. **Proprietà associativa**
$$T' + (T'' + T''') = (T' + T'') + T''', \quad \forall T', T'', T''' \in E_n^* \otimes F_m^* \tag{7}$$
3. **Esistenza dell'elemento neutro**
Sia $0_{E_n^* \otimes F_m^*}$ la forma bilineare nulla:
$$0_{E_n^* \otimes F_m^*} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0_{\mathbb{K}}, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times F_m \tag{8}$$
essendo $0_{\mathbb{K}}$ l'elemento neutro di $\mathbb{K}$. Segue
$$\left(T + 0_{E_n^* \otimes F_m^*}\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \underbrace{0_{E_n^* \otimes F_m^*}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=0_{\mathbb{K}}} = T(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times F_m$$
Quindi
$$T + 0_{E_n^* \otimes F_m^*} = 0_{E_n^* \otimes F_m^*} + T = T, \quad \forall T \in E_n^* \otimes F_m^*, \tag{9}$$
onde $0_{E_n^* \otimes F_m^*}$ è l'elemento neutro di $E_n^* \otimes F_m^*$.
4. **Esistenza dell'opposto**
$$\forall T \in E_n^* \otimes F_m^*, \ \exists (-T) \in E_n^* \otimes F_m^* \mid -T + T = 0_{E_n^* \otimes F_m^*} \tag{10}$$
L'elemento $-T$ si dice **opposto** di T ed è così definito:
$$(-T)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -T(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times F_m \tag{11}$$

Introduciamo quest'altra legge di composizione:
$$\begin{aligned} &\cdot : \mathbb{K} \times (E_n^* \otimes F_m^*) \to E_n^* \otimes F_m^* \\ &\cdot : (\lambda, T) \in \mathbb{K} \times (E_n^* \otimes F_m^*) \to (\lambda T) \in E_n^* \otimes F_m^*, \end{aligned} \tag{12}$$
così definita
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall T \in E_n^* \otimes F_m^*, \quad (\lambda T)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda T(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n \times F_m \tag{13}$$
Tale legge di composizione di chiama **moltiplicazione di uno scalare per un tensore** e verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà distributiva rispetto all'addizione di tensori**
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall T', T'' \in E_n^* \otimes F_m^*, \quad \lambda (T' + T'') = \lambda T' + \lambda T'' \tag{14}$$
2. **Proprietà distributiva rispetto all'addizione di scalari**
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall T \in E_n^* \otimes F_m^*, \quad (\lambda + \mu) T = \lambda T + \mu T \tag{15}$$
3. **Proprietà associativa**
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall T \in E_n^* \otimes F_m^*, \quad (\lambda \mu) T = \lambda (\mu T) \tag{16}$$
4. **Esistenza dell'elemento neutro**
$$1 \in \mathbb{K} \mid 1T = T, \quad \forall T \in E_n^* \otimes F_m^* \tag{17}$$