Prodotto di Eulero. La funzione euleriana gamma

Marcello Colozzo – www.extrabyte.info

È espresso dal teorema:

Teorema 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right), \quad s \in \mathbb{R} \mid s > 1 \tag{1}$$

essendo p_n l'n-esimo numero primo.

Dimostrazione. L'argomento della produttoria è la somma di una serie geometrica:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p_n^s}\right)^k = \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$$

per cui

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p_n^s}\right)^k \tag{2}$$

L'asserto segue dallo svolgimento del prodotto a secondo membro della (2) e applicando il teorema fondamental
■

Dal teorema appena dimostrato, segue immediatamente:

Corollario 2 *Esistono infiniti numeri primi*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, supponendo che esistano $N < +\infty$ numeri primi. Ciò implica:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - p_n^{-s}\right), \quad \forall s > 1$$

Ne segue che il prodotto di Eulero si riscrive:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - p_n^{-s}\right), \quad \forall s > 1$$

Tuttavia se poniamo $s = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - p_n^{-1}\right)$$

Il primo membro è la serie armonica che come sappiamo diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} = +\infty \Longrightarrow \prod_{n=1}^{N} \left(1 - p_n^{-1}\right) = +\infty$$

Ma ciò è assurdo in quanto il prodotto di un numero finito di termini (finiti) non può divergere. ■

***

Eulero estese il fattoriale di n

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\dots 1 \end{cases} \tag{3}$$

ai numeri reali > -1

$$s! = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx, \quad \forall s > -1 \tag{4}$$

ed è facile persuadersi che l'integrale generalizzato a secondo membro, converge per $s > -1$. Gauss introdusse la notazione:

$$\Pi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx \tag{5}$$

che può essere estesa al campo complesso:

$$\Pi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx, \quad s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > -1 \tag{6}$$

Esiste, inoltre, quest'altra rappresentazione (dovuta ad Eulero):

$$\Pi(s) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots N}{(s+1)(s+2)\dots(s+N)} (N+1)^s \tag{7}$$

Sussistono poi le seguenti proprietà che enuciamo senza dimostrare:

$$\Pi(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1-s}(n+1)^s}{s+n} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{N}\right)^{-1} \left(1 + n^{-1}\right)^s \tag{8}$$

L'equazione funzionale:

$$\Pi(s) = s\Pi(s-1) \tag{9}$$

e

$$\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin \pi s \tag{10}$$

$$\Pi(s) = 2^s \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \Pi\left(\frac{s-1}{2}\right) \pi^{-1/2} \tag{11}$$

Si dimostra che $\Pi(s)$ ha singolarità isolate (poli semplici) in $s = -1, -2, -3, \dots$, ed è priva di zeri.

Sfortunatamente, Legendre introdusse quest'altra notazione:

$$\Gamma(s) = \Pi(s-1)$$

che è quella attualmente nota.