Un esempio di Problema di Cauchy

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia data l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = -x^2 t \tag{1}$$

per cui posto $F(t,x) \overset{def}{=} -x^2 t \Longrightarrow F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Pertanto è verificata l'ipotesi del Teorema di esistenza. Conseguentemente, comunque prendiamo $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D} = \mathbb{R}^2$, esiste, in un opportuno intorno I di t_0, la soluzione del problema di Cauchy:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x} = -x^2 t \\ x(t_0) = x_0 \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Per verificare tale asserzione, integriamo innanzitutto la (1) per separazione di variabili:

$$x(t,C) = \frac{2}{t^2 + C}$$

Deve essere:

$$x(t_0, C) = x_0,$$

cioè

$$\frac{2}{t^2 + C} = x_0,$$

da cui l'unico valore della costante di integrazione

$$C_0 = \frac{2}{x_0} - t_0^2, \tag{3}$$

che individua l'integrale particolare risolvente il problema di Cauchy assegnato. Più precisamente:

$$\xi(t) = x(t, C_0) = \frac{2x_0}{(t^2 - t_0^2)\, x_0 + 2} \tag{4}$$

Se $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ sono tali che $t_0^2 - \frac{2}{x_0^2} > 0$, la funzione (4) è definita in $\mathbb{R} - \left\{ \pm\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}} \right\}$. In tal caso riesce:

$$I(t_0) = \begin{cases} \left(\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}}, +\infty \right), & \text{se } t_0^2 - \frac{2}{x_0^2} > 0 \text{ e } x_0 > 0 \\ \left(-\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}}, +\sqrt{t_0^2 - \frac{2}{x_0}} \right), & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Un andamento tipico per $t_0^2 - \frac{2}{x_0^2} > 0$ e $x_0 > 0$ è riportato in fig. 1.

Per $x_0 < 0$ un tipico andamento è illustrato in fig. 2.

Notiamo, infine, che la soluzione del problema di Cauchy (2) è unica:

$$\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2,\ \exists! \xi(t) = \frac{2x_0}{(t^2 - t_0^2)\, x_0 + 2} \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = -t\xi(t)^2 \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in I(t_0), \tag{6}$$

dove $I(t_0)$ è dato dalla (5). Tuttavia, il Teorema **??** non garantisce l'unicità della soluzione del problema (**??**). Ciò perchè la continuità della funzione F è condizione necessaria ma non sufficiente per l'unicità della soluzione.

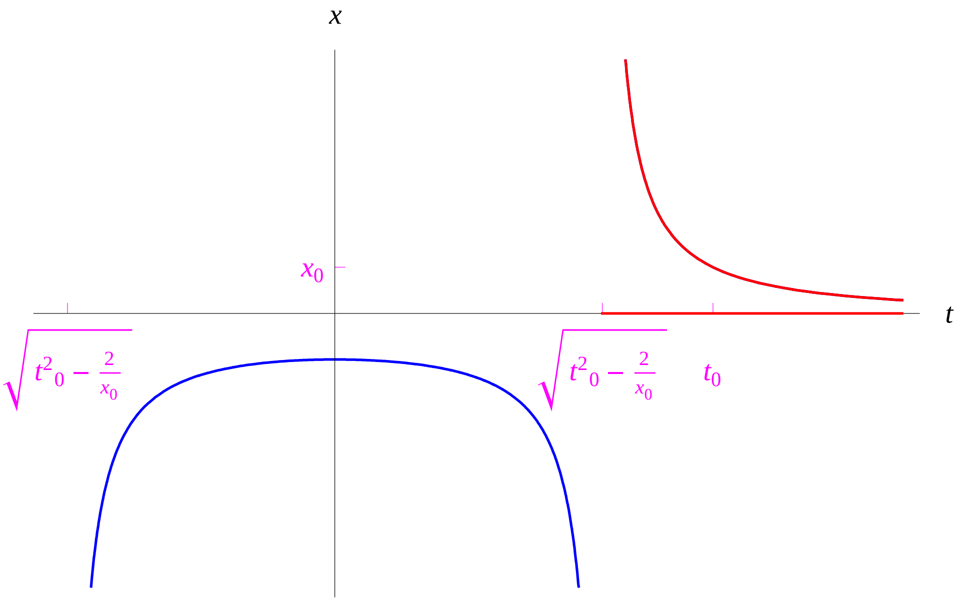

Figura 1: La curva in rosso è il grafico della soluzione del problema di Cauchy (2) per $t_0 = 2$ e $x_0 = 1$. L'altro ramo (curva in blu) non è accettabile, poichè deve essere $\xi(t) \in C^1(I(t_0))$.

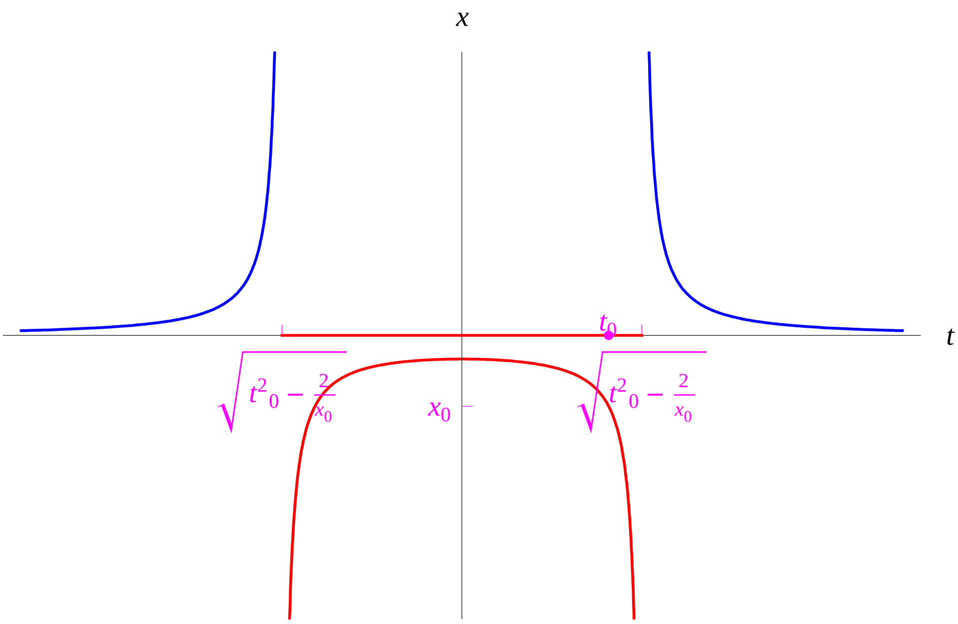

Figura 2: La curva in rosso è il grafico della soluzione del problema di Cauchy (2) per $t_0 = 2$ e $x_0 = -1$. L'altro ramo (curva in blu) non è accettabile, poichè deve essere $\xi(t) \in C^1(I(t_0))$.