# Esercizio di Analisi vettoriale

**Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info**

**Esercizio 1** *Studiare il campo vettoriale*

$$\mathbf{u}(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathbf{j} \tag{1}$$

**Soluzione**

Le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{u}(x,y)$

$$u_x(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}, \quad u_y(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

sono funzioni definite nel campo $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ che è connesso ma non semplicemente connesso. Calcoliamo

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

per cui il campo è irrotazionale. Proviamo a determinarne la più generale primitiva $U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2} \tag{2}$$

Dalla seconda

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \frac{x+y}{x^2+y^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dx + \int \frac{d(y/x)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + \arctan\frac{y}{x} + f(x) \end{aligned}$$

Per determinare $f(x)$ deriviamo rispetto a $x$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x+y}{x^2+y^2} + f'(x)$$

Tenendo conto della prima delle (2) si ha $f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x) \equiv C$, per cui

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + \arctan\frac{y}{x} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R} \tag{3}$$

che è una primitiva locale nei singoli semipiani $x > 0$ e $x < 0$. Calcoliamo esplicitamente l'integrale di circuitazione

$$\oint_{+\gamma} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

ove

$$\gamma : x = R\cos\theta, \; y = R\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{è}$$

è una circonferenza centrata nell'origine e di raggioi $R$. Abbiamo

$$\oint_{+\gamma} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{R(\cos\theta - \sin\theta) R(-1)\sin\theta}{R^2} + \frac{R(\cos\theta + \sin\theta) R\cos\theta}{R^2} \right] d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left( -\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

per cui la forma differenziale $\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ non è un differenziale esatto.

In fig. 1 plottiamo l'andamento di (3) per $C = 0$.

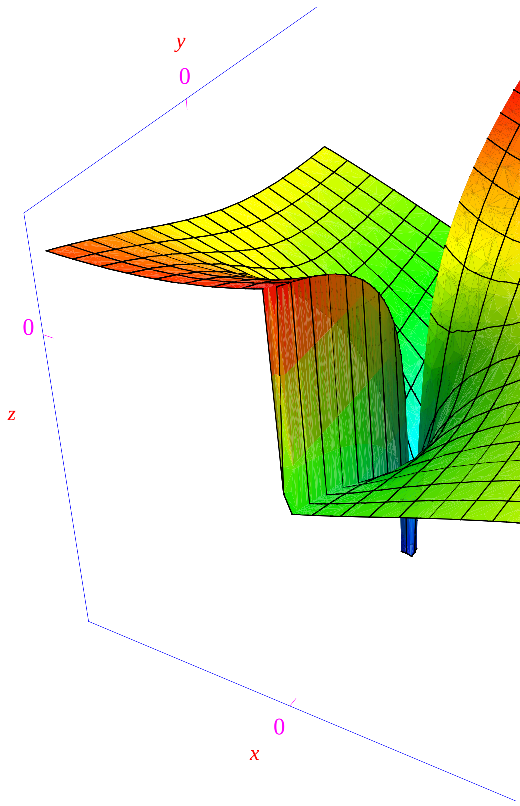


Figura 1: *Grafico della primitiva locale (3). Si noti la singolarità nell'origine.*

Se nella (3) passiamo alle coordinate polari $(r, \varphi)$:

$$U(r, \varphi) = \ln r + \varphi + C$$

Questa funzione è monodroma a patto di prendere la determinazione principale dell'anomalia $\varphi$. Diversamente, otteniamo una