Equazioni goniometriche

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esempio 1 *Risolviamo l'equazione:*

$$\sin^3 x - \sin^2 x \cos x = 0 \tag{1}$$

Trattandosi di un'equazione omogenea di terzo grado, il procedimento standard richiede la divisione di primo e secondo membro per $\cos^3 x$ *(con la condizione* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\frac{\pi}{2}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$ *), ottenendo:*

$$\tan^3 x - \tan^2 x = 0 \Longleftrightarrow \tan^2 x (\tan x - 1) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$\begin{cases} \tan^2 x = 0 \\ \tan x - 1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

La prima delle (2) si risolve immediatamente:

$$\tan^2 x = 0 \Longleftrightarrow \tan x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

La seconda:

$$\tan x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono le (3)-(4).

Alternativamente l'equazione data può essere scritta come:

$$\sin^2 x (\sin x - \cos x) = 0$$

La legge di annullamento del prodotto produce il sistema:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

La prima delle (5) è immediata:

$$\sin^2 x = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

La seconda è omogenea di primo grado, quindi dividiamo primo e secondo membro per $\cos x$ *(con la condizione* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\frac{\pi}{2}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$ *), ottenendo:*

$$\tan x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Abbiamo così ottenuto il medesimo risultato. Per concludere notiamo che l'equazione $\sin x = \cos x$ *si risolve "al volo" o meglio, per via grafica tracciando la circonferenza goniometrica o i grafici di* $\sin x$ *e* $\cos x$ *in* $[0, 2\pi]$*, come riportato in fig. 1.*

Esempio 2 *Risolviamo:*

$$\sin^3 x \cos x + \sin^2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos^3 x - 3 \cos^4 x = 0 \tag{6}$$

Trattandosi di un'equazione omogenea di quarto grado, dividiamo primo e secondo membro per $\cos x$ *(*$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*), ottenendo:*

$$\tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0,$$

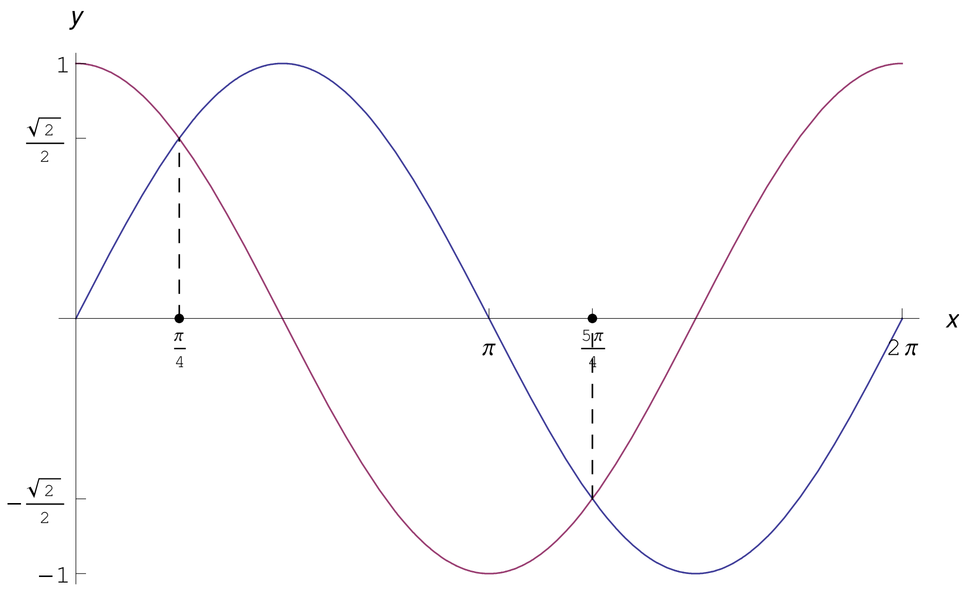

Figura 1: In $[0, 2\pi]$ risulta $\sin x = \cos x$ per $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$. Ricordando che $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, si ha che $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e $x = \frac{5}{4} + 2k\pi$. Queste due formule sono inglobate in $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

che è un'equazione di terzo grado in $\tan x$*. D'altra parte, se dividiamo la (6) per* $\sin x$ *(*$x \neq k\pi$*):*

$$3\cot^4 x + 3\cot^3 x - \cot^2 x - \cot x = 0,$$

che è comunque un'equazione di quarto grado (in $\cot x$*) ma più semplice da risolvere. Infatti:*

$$3\cot x \left(3\cot^3 x + 3\cot^2 x - \cot x - 1\right) = 0 \iff \begin{cases} \cot x = 0 \\ 3\cot^3 x + 3\cot^2 x - \cot x - 1 = 0 \end{cases}$$

La prima è immediata:

$$\cot x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{7}$$

Per la seconda poniamo $y = \cot x$*, onde:*

$$3y^3 + 3y^2 - y - 1 = 0 \iff (y+1)\left(3y^2 - 1\right) = 0 \iff \begin{cases} y = -1 \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x*:*

$$\begin{cases} \cot x = -1 \\ \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

le cui soluzioni sono rispettivmante:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \tag{8}$$

Le (7)-(7) le soluzioni dell'equazione data.