Pendolo semplice

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Definizione 1 *Dicesi* **pendolo semplice** *un punto materiale pesante vincolato a restare su una traiettoria liscia (i.e. priva di attrito) disposta su un piano verticale.*

Tale sistema fisico può essere realizzato in più modi. Quello più immediato consiste nel sospendere una massa m (schematizzata da un punto materiale) ad un punto fisso attraverso un filo inestensibile di massa trascurabile (fig. 1), a patto di poter trascurare la resistenza dell'aria. Se inzialmente i punto materiale si trova in O, cioè nel punto più basso della traiettoria, il diagramma delle forze agenti restituisce:

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

dove $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ è ovviamente la forza peso, mentre $\mathbf{T}$ è la tensione esercitata dal filo. Se la velocità iniziale è nulla, il punto rimane in quiete nella predetta posizione.

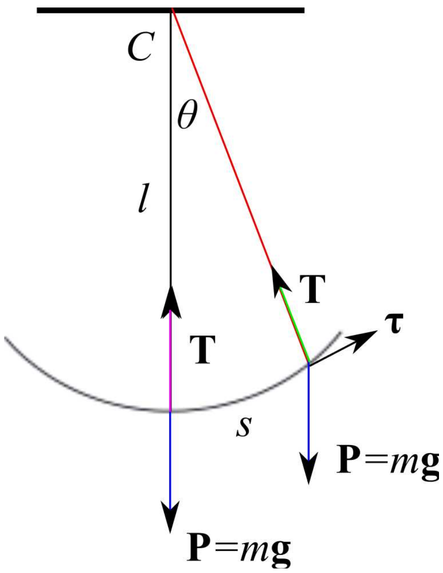

Figura 1: Pendolo semplice

Se invece il punto è inizialmente posto in una posizione diversa dalla precedente, si ha:

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} = \mathbf{F} \neq \mathbf{0}, \tag{2}$$

cosicché si muovera di moto accelerato lungo l'arco γ di circonferenza di centro C e raggio l, come illustrato in fig. 1. Precisamente, invocando il secondo principio della dinamica:

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} = m\mathbf{a} \tag{3}$$

Adottiamo un sistema di ascisse curvilinee lungo γ con origine in O e verso positivo quello verso destra. Ne consegue l'ovvia relazione

$$s = l\theta \tag{4}$$

Trattandosi di un moto piano, l'accelerazione vettoriale si scompone

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \tag{5}$$

essendo $\mathbf{a}_t$ l'accelerazione tangenziale, i.e. il vettore componente di $\mathbf{a}$ secondo la direzione della tangente a γ orientata nel verso delle s crescenti:

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau}$$

Qui $\boldsymbol{\tau}$ è il versore della predetta tangente. Il vettore $\mathbf{a}_n$ è l'accelerazione normale (o centripeta), ovvero il vettore componente di $\mathbf{a}$ nella direzione della normale a γ. Denotando con $\mathbf{n}$ il corrispondente versore, si ha:

$$\mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{l}\mathbf{n}$$

Ne consegue che l'equazione vettoriale (3) si scompone nel sistema di equazioni scalari:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m\ddot{s} \\ T - mg\cos\theta = m\frac{\dot{s}^2}{l} \end{cases} \tag{6}$$

Osserviamo immediatamente che il primo membro della seconda è il modulo della forza centripeta necessaria per compiere il moto su trattiettoria curvilinea (circolare). Dalla prima ricaviamo

$$\ddot{s} = -g\sin\left(\frac{s}{l}\right) \tag{7}$$

che è un'equazione differenziale da integrare con le condizioni iniziali

$$s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}_0,$$

dove s_0 è l'ascissa curvilinea iniziale del punto. Per ipotesi il punto materiale è lasciato libero in $t = 0$, onde la velocità iniziale è nulla. Si noti che la predetta equazione differenziale è non lineare, ed è di difficile integrazione. Sarà compito del corso di Meccanica Razionale integrare analiticamente tale equazione. Tuttavia, per "piccole oscillazioni" attorno alla posizione di equilibrio, cioè

$$|s| \ll l,$$

possiamo approssimare

$$\sin\left(\frac{s}{l}\right) \simeq \frac{s}{l}$$

onde

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0,$$

in cui riconosciamo la famosa equazione armonica. Ne consegue che $s(t)$ è un oscillazione sinusoidale di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e quindi di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8}$$

È chiaro che per oscillazioni con ampiezza maggiore, il risultato precedente è invalidato e ci si aspetta una perdita di periodicità del moto, come confermato dal grafico di fig. 2 ottenuto integrando numericamente l'equazione differenziale del moto. Precisamente, la curva più marcata è il diagramma orario del moto effettivo, confrontato con il diagramma orario ottenuto con l'approssimazione precedente.

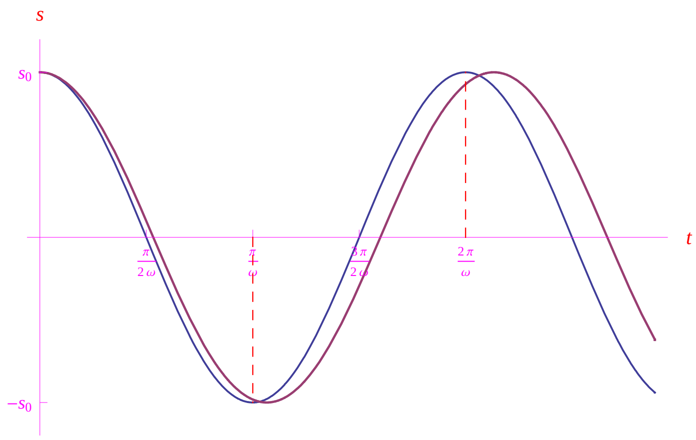

Figura 2: Pendolo semplice. La soluzione esatta (curva marcata) confrontata con la soluzione approssimata.