Esercizio di Fisica 1

Marcello Colozzo

1 Applicazione dell'uso degli integrali primi: il pendolo semplice

Riprendiamo il pendolo semplice, illustrato in fig. 1. Assumendo un asse y orientato verso l'alto e con orgine in O, l'energia potenziale della forza di gravità $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ è

$$V(y) = mgy \tag{1}$$

Dalla fig. 1 $y = l(1 - \cos\theta)$, per cui

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) \tag{2}$$

Segue l'integrale primo del moto (energia meccanica)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) \tag{3}$$

Istituendo un sistema di ascisse curvilinee con origine degli archi in O, si ha $s(t) = l\theta(t)$, per cui la velocità scalare è $v = \dot{s} = l\dot{\theta}$ e quindi

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

Segue

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - mgl(1 - \cos\theta)\right]} \tag{4}$$

dove va preso il segno $+$ se $\theta(t)$ in tutti e soli gli intervalli di tempo in cui la funzione $\theta(t)$ è monotonamente crescente, e viceversa. La (4) è un'equazione differenziale del primo ordine (non tenendo conto dell'ambiguità del segno) che si integra per separazione di variabili. Per una assegnata condizione iniziale, l'unica soluzione è espressa in termini del parametro E che tuttavia, è univocamente determinato dalla predetta condizione iniziale. Se ad esempio, all'istante iniziale $t_0 = 0$ il pendolo è lasciato "cadere" da una quota $y_0 = l(1 - \cos\theta_0)$, si ha

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

per cui l'energia meccanica (si conserva) è

$$E = T_0 + V_0,$$

essendo $T_0 = 0$ l'energia cinetica iniziale e $V_0 = mgl(1 - \cos\theta_0)$ l'energia potenziale iniziale. Quindi

$$E = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

che sostituita nella (4) porge

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}, \quad \theta(0) = \theta_0$$

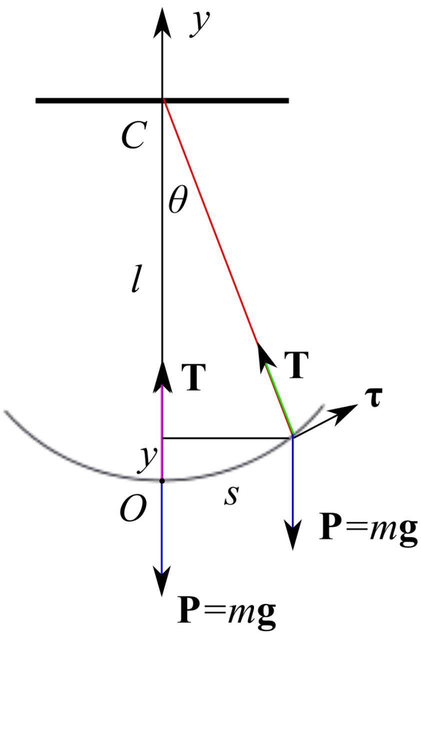

Figura 1: Pendolo semplice.

La regione classicamente accessibile è

$$\Lambda\left(\theta_0\right)=\left[-\theta_0,\theta_0\right] \tag{5}$$

Risolvendo rispetto a $t\left(\theta\right)$

$$t\left(\theta\right)=\pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\theta\frac{d\theta'}{\sqrt{\cos\theta'-\cos\theta_0}} \tag{6}$$

Il moto è periodico con periodo T tale che

$$\frac{T}{4}=+\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} \tag{7}$$

Nel limite delle piccole oscillazioni, possiamo sviluppare in serie l'integrando dopodiché valutare l'integrale. Si dimostra che nel predetto limite è

$$T\simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

come avevamo trovato applicando il secondo principio della dinamica.