Esercizio di cinematica

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Da un balcone viene lanciata una palla verso l'alto (in direzione verticale) con velocità iniziale v_0. Un passante munito di un misuratore di velocità ad ultrasuoni, esegue una misura nell'istante in cui la palla tocca il marciapiede.*

L'esperimento viene ripetuto lanciando la palla verso il basso (in direzione verticale) con la medesima velocità (in modulo) del caso precedente. Confrontare il valore ottenuto ora con quello del primo esperimento. (Trascurare la resistenza dell'aria).

***Dati**: l'altezza rispetto al marciapiede del punto di lancio della palla è un termine noto che può essere denotato con h.*

Soluzione

Con ovvio significato dei simboli, lo schema dell'esercizio è riportato in fig. 1. Con tale scelta del sistema di riferimento, l'equazione oraria del moto si scrive:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \qquad \forall t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

avendo assunto $t = 0$ come istante di lancio. Nel piano ty la (1) è l'equazione di un arco di parabola che giace nel semipiano $t > 0$. Otteniamo immediatamente i punti di intersezione con l'asse t:

$$y(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0, \; t = \frac{2v_0}{g} \tag{2}$$

In particolare:

$$t_1 \overset{def}{=} \frac{2v_0}{g}, \tag{3}$$

è l'istante in cui la palla ritorna alla quota di partenza. La massima altezza raggiunta è uno zero della velocità i.e. derivata prima:

$$v(t) \equiv \dot{y}(t) = v_0 - gt \tag{4}$$

Cioè

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g} \Longrightarrow t_1 = 2t_{\max} \tag{5}$$

Il problema si risolve determinando innanzitutto l'istante in cui la palla tocca il marciapiede, dopodiché si calcola la velocità con la (4). Dobbiamo quindi risolvere l'equazione:

$$y(t) = -h$$

Cioè

$$gt^2 - 2v_0 t - 2h = 0,$$

da cui

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

Scartando la radice < 0 in quanto priva di significato fisico, otteniamo il predetto istante:

$$t_h = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}, \tag{6}$$

graficamente illustrato in fig. 2.

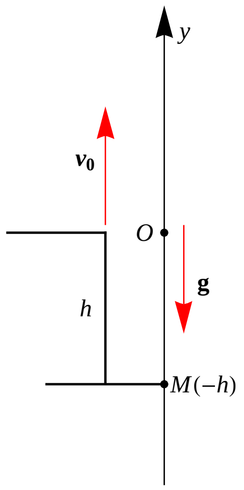

Figura 1: Esercizio 1. Scelta del sistema di riferimento.

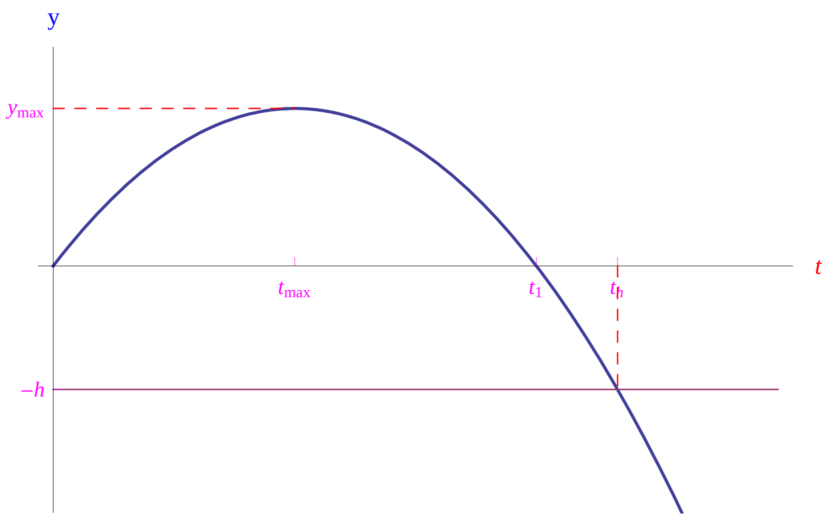

Figura 2: Esercizio 1. Grafico dell'equazione oraria, esperimento 1.

La velocità misurata dal passante è

$$v_h = v\left(t_h\right) = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} \tag{7}$$

Passiamo all'esperimento 2. Con lo stesso sistema di riferimento, l'equazione oraria si scrive:

$$y\left(t\right) = -v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \qquad \forall t \in [0, +\infty) \tag{8}$$

Non dobbiamo fare altro che applicare il procedimento precedente:

$$y\left(t\right) = -h \Longleftrightarrow gt^2 + 2v_0 t + 2h = 0$$

Al solito, prendendo solo la radice positiva:

$$t'_h = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \tag{9}$$

Segue

$$v'_h = v\left(t'_h\right),$$

prestando attenzione al fatto che ora la velocità è

$$v\left(t\right) = -v_0 - gt, \tag{10}$$

onde

$$v'_h = - - \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \tag{11}$$

Cioè

$$v_h = v_{h'} \tag{12}$$

Ne concludiamo che il passante misura la stessa velocità. Il diagramma orario dell'esperimento 2 è riportato in fig. 3.

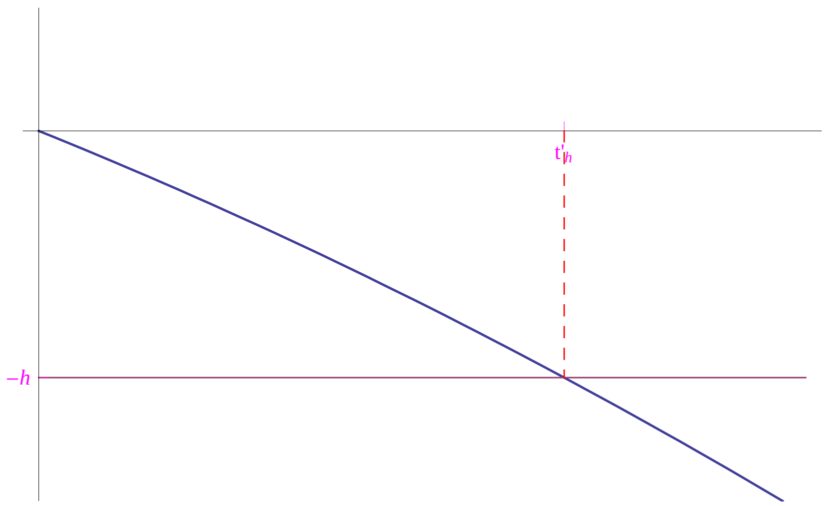

Figura 3: Esercizio 1. Grafico dell'equazione oraria, esperimento 2.