

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Un problema di balistica esterna: il dominio di sicurezza

Marcello Colozzo



Indice

1	Parabola di sicurezza e dominio di sicurezza	2
2	Massima gittata sull'asse x	4
3	Angolo di sito di un punto	4
4	Massima gittata su una retta parallela all'asse x	5

1 Parabola di sicurezza e dominio di sicurezza

In alcuni esercizi precedenti (1–2) bisognava determinare la massima gittata di una bocca da fuoco non sull'asse x (del sistema di coordinate opportunamente scelto), ma su una retta parallela al predetto asse. Avevamo poi visto che il procedimento standard basato sulla determinazione degli estremi relativi di una funzione, è piuttosto laborioso. Diversamente, il metodo della **parabola di sicurezza** ci aveva permesso di giungere più velocemente al risultato.

In questo lavoro cercheremo di generalizzare l'esercizio, da un punto di vista esclusivamente matematico. A tale scopo fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali come in fig. 1, in cui vediamo oltre alla retta $r_0 : y = \eta_0$, un arco di parabola:

$$\gamma : y = x \tan \theta - \lambda_0 (1 + \tan^2 \theta) x^2, \quad x \geq 0$$

dove $\lambda > 0$ è un coefficiente assegnato una volta per tutte (con le dimensioni di una lunghezza). Il lettore riconoscerà la seguente grandezza:

$$\lambda_0 = \frac{g}{2v_0^2},$$

dove v_0 è il modulo della velocità iniziale del proiettile sparato nell'origine delle coordinate. Ne consegue che λ_0 ha un valore estremamente piccolo. Ad esempio, per $v_0 = 100 \text{ m/s}$, si ha $\lambda \simeq 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Incidentalmente, notiamo i due comportamenti al limite:

$$\begin{aligned} \lim_{v_0 \rightarrow +\infty} \lambda_0 = 0 &\implies \gamma : y = x \tan \theta \quad (\text{retta per l'origine}) \\ \lim_{v_0 \rightarrow 0^+} \lambda_0 = +\infty &\quad (\text{non-sense}) \end{aligned}$$

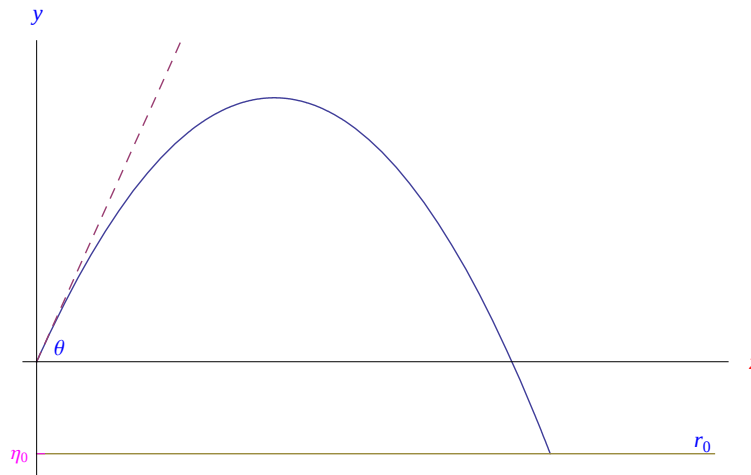


Figura 1: Scelta degli assi coordinati.

Il termine $\tan \theta$ è invece, il coefficiente angolare della retta tangente a γ nel punto $(0, 0)$ (fisicamente, è l'angolo di tiro noto come *alzo*). Assumendo θ come parametro variabile in $[0, \frac{\pi}{2}]$, viene a definirsi la famiglia di curve piane ad un parametro:

$$\mathcal{F} = \left\{ \gamma : y = x \tan \theta - \lambda_0 (1 + \tan^2 \theta) x^2, \quad x \geq 0 \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} \quad (1)$$

Ciò premesso, la parabola di sicurezza è l'involuppo della famiglia di curve piane (1). Anziché applicare il **procedimento standard** per la determinazione dell'involuppo, ragioniamo come

segue: preso ad arbitrio un punto $P(\xi, \eta)$ con $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, determiniamo quale condizione devono verificare le coordinate ξ, η affinché per P passi almeno una curva della famiglia (1). Evidentemente:

$$\exists \gamma \in \mathcal{F} \mid P(\xi, \eta) \in \gamma \iff \eta = \xi \tan \theta - \lambda_0 (1 + \tan^2 \theta) \xi^2$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione quadratica in $\tan \theta$:

$$\lambda_0 \xi \tan^2 \theta - \xi \tan \theta + \eta + \lambda_0 \xi^2 = 0,$$

le cui radici sono

$$\tan \theta = \frac{\xi \pm \sqrt{\Delta(\xi, \eta)}}{2\lambda_0 \xi^2}, \quad (2)$$

ove

$$\Delta(\xi, \eta) = \xi^2 - 4\lambda_0 \xi^2 (\eta + \lambda_0 \xi^2)$$

è il discriminante della predetta equazione: Ne segue

$$\Delta(\xi, \eta) > 0 \implies \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F} \mid P(\xi, \eta) \in \gamma_1 \cap \gamma_2 \quad (3)$$

$$\Delta(\xi, \eta) = 0 \implies \exists! \gamma \in \mathcal{F} \mid P(\xi, \eta) \in \gamma$$

$$\Delta(\xi, \eta) < 0 \implies \nexists \gamma \in \mathcal{F} \mid P(\xi, \eta) \in \gamma$$

Il caso che ci interessa è il secondo

$$\Delta(\xi, \eta) = 0 \iff \xi^2 - 4\lambda_0 \xi^2 (\eta + \lambda_0 \xi^2) = 0,$$

da cui

$$\eta = \frac{1}{4\lambda_0} - \lambda_0 \xi^2$$

Passando alle coordinate correnti x, y

$$\gamma_{s, \lambda_0} : y = \frac{1}{4\lambda_0} - \lambda_0 x^2 \quad (4)$$

che è la parabola di sicurezza, il cui andamento è riportato in fig. 2, da cui vediamo i seguenti particolari:

$$\text{intersezione con l'asse } x: X_0 = \frac{1}{2\lambda_0} = \frac{v_0^2}{g} \quad (5)$$

$$\text{intersezione con l'asse } y \text{ (ordinata del vertice): } y_V = \frac{1}{4\lambda_0} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Abbiamo così raggiunto il seguente risultato: Per un punto $P(x, y)$ del piano xy (con $x, y > 0$) passa almeno una curva della famiglia (1) se e solo se $P \in D_{\lambda_0}$, dove quest'ultimo è il seguente dominio regolare:

$$D_{\lambda_0} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2\lambda}, \ 0 \leq y \leq f_{\lambda_0}(x) \right\}, \quad (6)$$

essendo

$$f_{\lambda_0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\lambda_0} - \lambda_0 x^2 \quad (7)$$

Più precisamente

$$\exists \gamma \in \mathcal{F} \mid P \in \gamma \iff P \in D_{\lambda_0} \quad (8)$$

$$P \in D_{\lambda_0} - \partial D_{\lambda_0} \implies \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F} \mid P \in \gamma_1 \cap \gamma_2$$

$$P \in \partial D_{\lambda_0} \implies \exists! \gamma \in \mathcal{F} \mid P \in \gamma$$

Definizione 1 Il dominio (6) si dice **dominio di sicurezza**.



Figura 2: Parabola di sicurezza quale curva inviluppo della famiglia di curve piane (1).

2 Massima gittata sull'asse x

L'ascissa X_0 (eq. (5)) del punto di intersezione della parabola di sicurezza con l'asse x , è manifestamente la massima gittata sul predetto asse. Quindi, ritroviamo il noto risultato

$$X_0 = \frac{v_0^2}{g}$$

Per determinare l'angolo, dobbiamo trovare la curva γ_0 della famiglia (1) passante per $(X_0, 0)$. Quindi

$$0 = X_0 \tan \theta - \lambda_0 (1 + \tan^2 \theta) X_0^2$$

Risolvendo rispetto a $\tan \theta$

$$\tan \theta = 1 \xRightarrow{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]} \theta = \frac{\pi}{4},$$

che è un risultato altrettanto noto.

3 Angolo di sito di un punto

La determinazione dell'angolo θ può essere velocizzata applicando un importante teorema. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 2 Dicesi **angolo di sito** di un punto $P_0(x_0, y_0)$ con $x_0, y_0 \geq 0$, l'angolo

$$\varepsilon_0 = \arctan \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \quad (9)$$

Dimostriamo il teorema

Teorema 3 Comunque prendiamo un punto $P_0(x_0, y_0) \in D_{\lambda_0} - \partial D_{\lambda_0}$, si ha

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0,$$

dove θ_1, θ_2 definiscono le curve γ_1, γ_2 della famiglia (1) passanti per P_0 . Se $P_0 \in \partial D_{\lambda_0}$, si ha

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (10)$$

Dimostrazione. Per una possibile determinazione della somma $\theta_1 + \theta_2$ applichiamo la nota formula di addizione degli archi

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

Dalla (2)

$$\tan \theta_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{\Delta(x, y)}}{2\lambda_0 x^2}, \quad \Delta(x, y) = x^2 - 4\lambda_0 x^2 (y + \lambda_0 x^2) \quad (11)$$

onde

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x_0}{y_0}$$

Dalla (9):

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) \tan \varepsilon_0 = -1$$

Ma

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 - \varepsilon_0) = \frac{\tan(\theta_1 + \theta_2) - \tan \varepsilon_0}{\underbrace{1 + \tan(\theta_1 + \theta_2) \tan \varepsilon_0}_{=-1}} \rightarrow \infty \implies \theta_1 + \theta_2 - \varepsilon_0 = \frac{\pi}{2},$$

onde l'asserto. La (10) segue osservando che se $P_0 \in \partial D_\lambda$ passa una ed una sola curva della predetta famiglia. Quindi

$$\theta_1 = \theta_2 \equiv \theta,$$

e la formula dimostrata restituisce

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0$$

■

Per determinare l'angolo θ che caratterizza la curva di “massima gittata” sull'asse x , possiamo facilmente applicare la (10). Infatti, in tal caso l'angolo di sito è nullo, per cui $\theta = \frac{\pi}{4}$, come trovato in precedenza con un procedimento più laborioso.

4 Massima gittata su una retta parallela all'asse x

Ritorniamo al problema iniziale (fig. 1). Qui dobbiamo determinare la massima gittata sulla retta $r_0 := \eta_0$. Applicando il procedimento standard, si tratta di trovare l'intersezione della generica curva γ con la predetta retta. Quindi, dette (x_0, y_0) le coordinate del punto di intersezione, si ha

$$\eta_0 = x_0 \tan \theta - \lambda_0 (1 + \tan^2 \theta) x_0^2,$$

da cui è facile ricavare x_0 che però risulterà espresso in funzione di θ , per cui avremo una funzione $x(\theta)$, che va ovviamente massimizzata. Quest'ultimo è un procedimento laborioso, quindi applichiamo il metodo della parabola di sicurezza seguito dal teorema precedentemente dimostrato. In ogni caso, osserviamo che una soluzione trovata da **Fazio-Guazzoni** con la ricerca del massimo assoluto della funzione $x(\theta)$ è

$$\sin \theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2 - \eta_0 g)}},$$

da cui si evince

$$\begin{aligned}\eta_0 < 0 &\implies \theta_0 < \frac{\pi}{4} \\ \eta_0 > 0 &\implies \theta_0 > \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Applicando il metodo della parabola di sicurezza, troviamo l'intersezione di quest'ultima con la retta r_0 :

$$x_0 = \pm \frac{1}{2\lambda_0} \sqrt{1 - 4\lambda_0\eta_0} \xrightarrow{x_0 > 0} x_0 = \frac{1}{2\lambda_0} \sqrt{1 - 4\lambda_0\eta_0},$$

che è la massima gittata sulla retta r_0 . Per determinare l'angolo di lancio, calcoliamo prima l'angolo di sito del punto di intersezione:

$$\varepsilon_0 = \arctan\left(\frac{\eta_0}{x_0}\right) = \arctan\left(\frac{2\eta_0\lambda_0}{\sqrt{1 - 4\lambda_0\eta_0}}\right)$$

e quindi

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\eta_0\lambda_0}{\sqrt{1 - 4\lambda_0\eta_0}}\right) \quad (12)$$

Per concludere, lasciamo come esercizio per il lettore, la determinazione della massima gittata lungo la retta

$$y = x \tan \alpha,$$

con α angolo assegnato, determinando poi il corrispondente angolo di lancio. Non è difficile trovare la ben nota soluzione

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \quad (13)$$