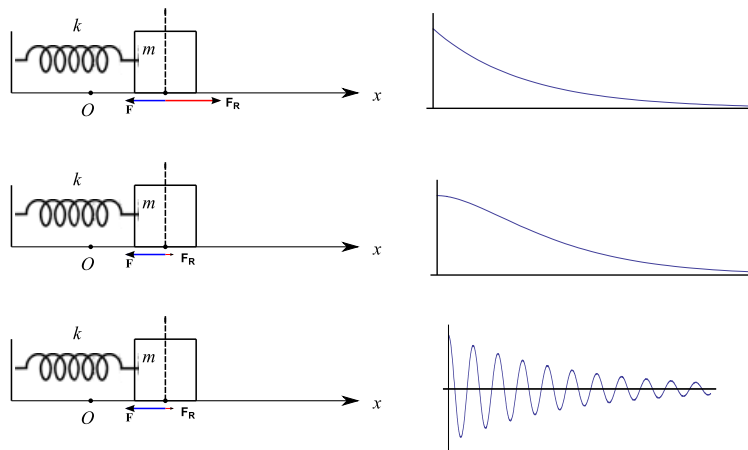


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

L'oscillatore armonico in Meccanica Classica

Marcello Colozzo



Indice

1	Processi oscillatori ideali	2
1.1	Oscillazioni libere	2
1.2	Oscillazioni forzate. Il fenomeno dei battimenti	6
1.3	Lo spazio delle configurazioni	14
1.4	Risonanza	19
1.5	Forza periodica ma non sinusoidale. Sviluppo in serie di Fourier	22
1.6	Forze variabili nel tempo (oscillatore armonico). Forme d'onda (circuito elettrico)	28
1.7	Oscillatore anarmonico	31
2	Oscillazioni smorzate	35
2.1	Caso aperiodico ($b > b_{crit}$)	36
2.2	Caso critico ($b = b_{crit}$)	38
2.3	Caso oscillatorio smorzato ($b < b_{crit}$)	41
2.4	Implementazione in Mathematica	44
2.5	Oscillazioni forzate. Risonanza	46
2.6	Oscillatore di Riemann	56
	Bibliografia	60

Capitolo 1

Processi oscillatori ideali

1.1 Oscillazioni libere

Definizione 1 L'**oscillatore armonico unidimensionale** è un sistema meccanico composto da un punto materiale di massa m che può muoversi su un piano orizzontale dove è vincolato a una molla ideale di massa nulla.

Fissiamo un riferimento cartesiano (Ox) con l'asse x contenuto nel piano orizzontale che sia parallelo all'asse della molla e orientato nel verso dell'allungamento di quest'ultima, come illustrato in fig. 1.1. . Se allungiamo la molla di una quantità x (che per quanto precede è

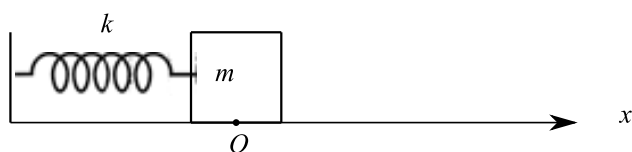


Figura 1.1: Oscillatore armonico

> 0), sul punto agisce una *forza elastica di richiamo*:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}, \quad (1.1)$$

dove \mathbf{i} è il versore dell'asse x (cfr. fig. 1.2), mentre $k > 0$ è la **costante elastica** della molla.

Se il punto materiale rimane in quiete significa che stiamo applicando una forza:

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = kx\mathbf{i} \quad (1.2)$$

necessaria per allungare la molla della quantità x . Se all'istante $t = 0$ rimuoviamo la forza \mathbf{F}' e se non sono presenti forze di attrito o resistenze passive, sul punto materiale agisce la sola forza elastica. In tal caso il secondo principio della dinamica si scrive:

$$m\ddot{x}\mathbf{i} = -kx\mathbf{i} \quad (1.3)$$

da cui otteniamo l'equazione scalare

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (1.4)$$

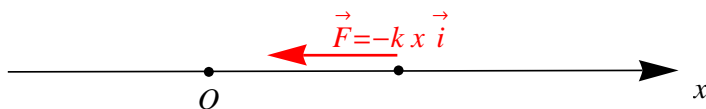


Figura 1.2: Forza di richiamo elastica agente sull'oscillatore armonico unidimensionale.

ovvero l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.5)$$

avendo definito la grandezza:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.6)$$

con le dimensioni dell'inverso di un tempo e che si chiama – per una ragione che apparirà chiara in seguito – **pulsazione** o **frequenza angolare** dell'oscillatore. L'evoluzione dinamica dell'oscillatore è dunque governato dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}, \quad (1.7)$$

dove $A > 0$ è l'allungamento iniziale della molla, e v_0 la velocità iniziale con cui il punto materiale viene rilasciato dopo che abbiamo allungato la molla. L'equazione differenziale dell'oscillatore armonico è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea e a coefficienti costanti, per cui applichiamo il procedimento standard per la ricerca dell'integrale generale. Precisamente, l'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (1.8)$$

da cui le radici complesse coniugate

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad (1.9)$$

E quindi l'integrale generale

$$x(t; C_1, C_2) = C_1 e^{-i\omega_0 t} + C_2 e^{i\omega_0 t} \quad (1.10)$$

Per la formula di Eulero

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm \pm i \sin \omega_0 t, \quad (1.11)$$

per cui

$$x(t; C_1, C_2) = (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0 t \quad (1.12)$$

Se ora poniamo

$$K_1 = C_1 + C_2, \quad K_2 = i(C_1 - C_2),$$

si ha

$$x(t; K_1, K_2) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t, \quad (1.13)$$

che può essere messa in una forma più intuitiva, eseguendo il cambio di integrazione:

$$(K_1, K_2) \rightarrow (B, \varphi) \quad (1.14)$$

tali che

$$K_1 = B \cos \varphi, \quad K_2 = -B \sin \varphi \quad (1.15)$$

L'integrale generale diventa

$$x(t; B, \varphi) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.16)$$

Imponiamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0; B, \varphi) = A \\ \dot{x}(0; B, \varphi) = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} B \cos \varphi = A \\ -\omega_0 B \sin \varphi = v_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

L'unica soluzione di tale sistema di equazioni è

$$B = \sqrt{A^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = -\arctan \frac{v_0}{A\omega_0} \quad (1.18)$$

Ne concludiamo che l'equazione oraria dell'oscillatore armonico è:

$$x(t) = \sqrt{A^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{v_0}{A\omega_0} \right) \quad (1.19)$$

che è funzione periodica di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

e quindi frequenza angolare ω_0 . L'ampiezza delle oscillazioni è

$$\sqrt{A^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

mentre la fase è pari a φ . Nel caso di velocità iniziale nulla:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t, \quad (1.20)$$

graficata in fig. 1.3. L'ampiezza delle oscillazioni si chiama *elongazione* dell'oscillatore.

La velocità si ottiene immediatamente derivando la funzione $x(t)$:

$$v(t) = -\omega_0 \sqrt{A^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin \left(\omega_0 t - \arctan \frac{v_0}{A\omega_0} \right), \quad (1.21)$$

che per $v_0 = 0$ si snellisce in

$$v(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t,$$

che può essere graficata assieme all'ascissa, ottenendo il diagramma di fig. 1.4.

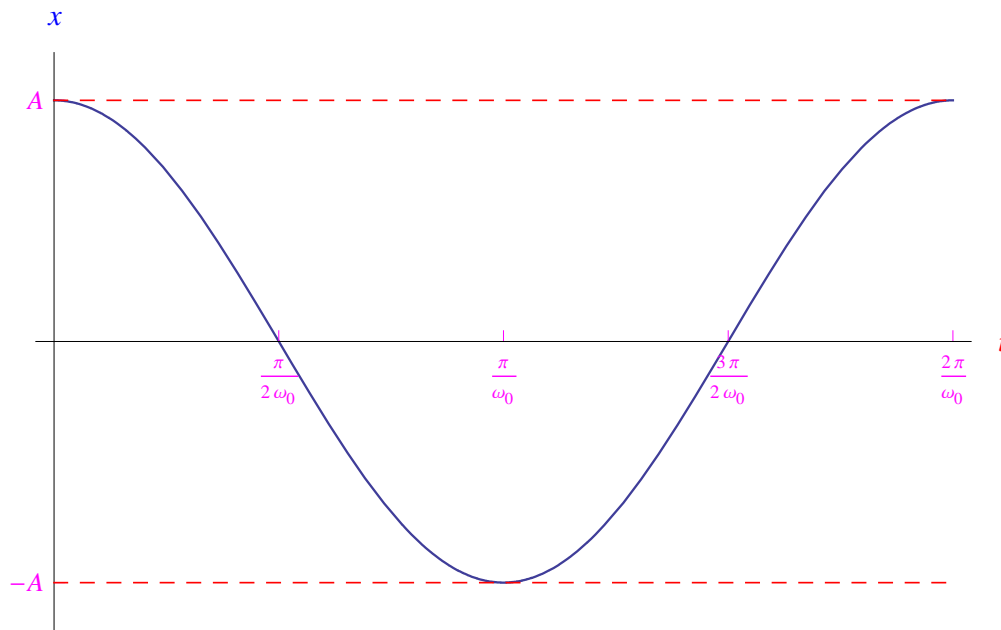


Figura 1.3: Diagramma orario di un oscillatore armonico di pulsazione ω_0 inizialmente allungato di A e rilasciato a velocità nulla.

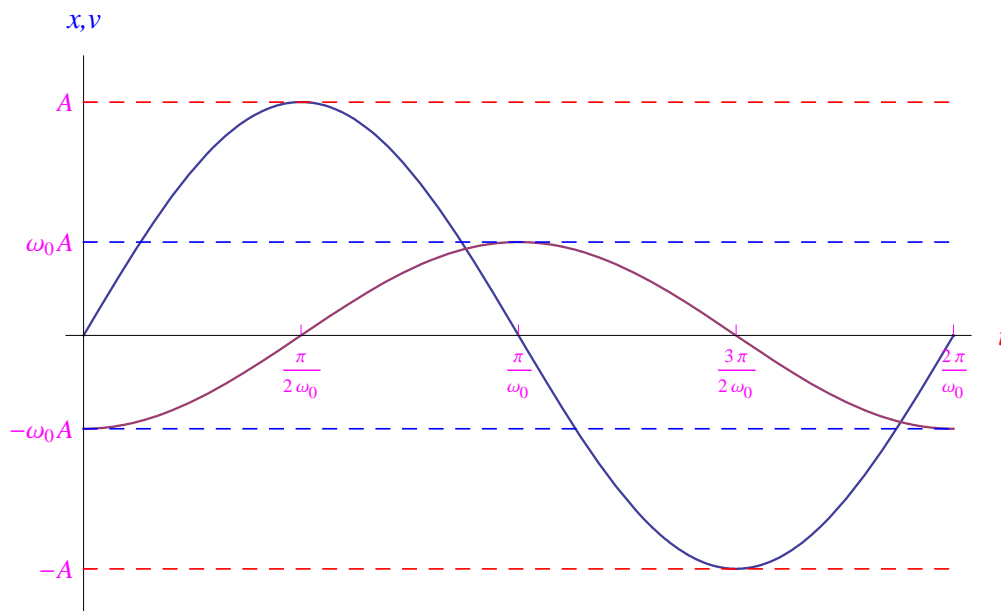


Figura 1.4: Ascissa e velocità di un oscillatore armonico unidimensionale in condizioni di idealità.

1.2 Oscillazioni forzate. Il fenomeno dei battimenti

Applichiamo al sistema studiato nella sezione precedente, una forza dipendente dal tempo secondo la legge:

$$F(t) = \mathcal{F}_M \cos \Omega t \quad (1.22)$$

Il secondo principio della dinamica fornisce

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_M \cos \Omega t, \quad (F_M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{F}_M}{m}) \quad (1.23)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine non omogenea e a coefficienti costanti. Dalla teoria sappiamo che in tal caso l'integrale generale si ottiene sommando a un integrale particolare $x_1(t)$ l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

che può comunque essere messo nella forma:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.24)$$

Un integrale particolare dell'equazione completa può scriversi:

$$x_1(t) = B \cos \Omega t \quad (1.25)$$

“Forziamo” questa funzione affinché soddisfi l'equazione da risolvere:

$$\dot{x}_1(t) = -\Omega B \sin \Omega t, \quad \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 B \cos \Omega t,$$

che sostituite nella (1.23):

$$-\Omega^2 B \cos \Omega t + \omega_0^2 B \cos \Omega t = F_M \cos \Omega t,$$

da cui l'ampiezza B

$$B = \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Cioè

$$x_1(t) = \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

Finalmente l'integrale generale

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

si ha l'ascissa dell'oscillatore in funzione del tempo:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t) \quad (1.26)$$

Se $x_0 = 0$:

$$x(t) = \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t), \quad (1.27)$$

da cui vediamo che $x(t)$ è la differenza di due oscillazioni armoniche aventi la stessa ampiezza. Precisamente:

$$\frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t - \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \omega_0 t$$

La prima oscillazione ha pulsazione Ω , mentre la seconda oscilla con la pulsazione caratteristica ω_0 . Si noti che deve essere

$$\Omega \neq \omega_0$$

Nel caso contrario l'ampiezza delle oscillazioni presenta una singolarità. I corrispondenti periodi delle oscillazioni componenti sono:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.28)$$

Ne consegue che $x(t)$ è periodica se e solo se i periodi T_1 e T_0 hanno in comune un multiplo minimo. A titolo d'esempio supponiamo:

$$\Omega = 3 \text{ rad s}^{-1}, \quad \omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1},$$

cosicchè

$$T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ s}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

che possono essere scritti come

$$T_1 = \frac{10\pi}{15}, \quad T_0 = \frac{6\pi}{15} \implies T = \frac{30\pi}{15} = 2\pi$$

Cioè

$$x(t) = \frac{F_M}{16} (\cos 3t - \cos 5t) \quad (1.29)$$

è periodica di periodo 2π e quindi ha una pulsazione $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$. In fig. 1.5 è tracciato il grafico della funzione (1.29).

Consideriamo ora l'oscillazione

$$\cos \pi t - \cos 5t,$$

ovvero

$$\Omega = \pi \text{ rad s}^{-1}, \quad \omega_0 = 5 \text{ rad s}^{-1} \quad (1.30)$$

per cui

$$T_1 = 2 \text{ s}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{5} \text{ s} \quad (1.31)$$

Dal momento che (1.31) non hanno un multiplo minimo in comune, segue che l'ascissa:

$$x(t) = \frac{F_M}{25 - \pi^2} (\cos \pi t - \cos 5t), \quad (1.32)$$

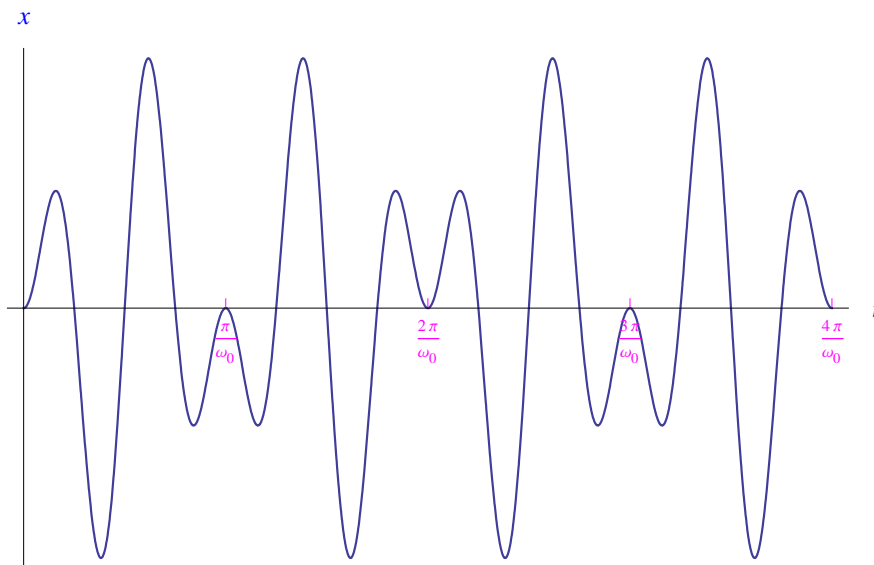


Figura 1.5: Grafico di $x(t) = \frac{F_M}{16} (\cos 3t - \cos 5t)$, da cui vediamo che è periodica di periodo $T = 2\pi$.

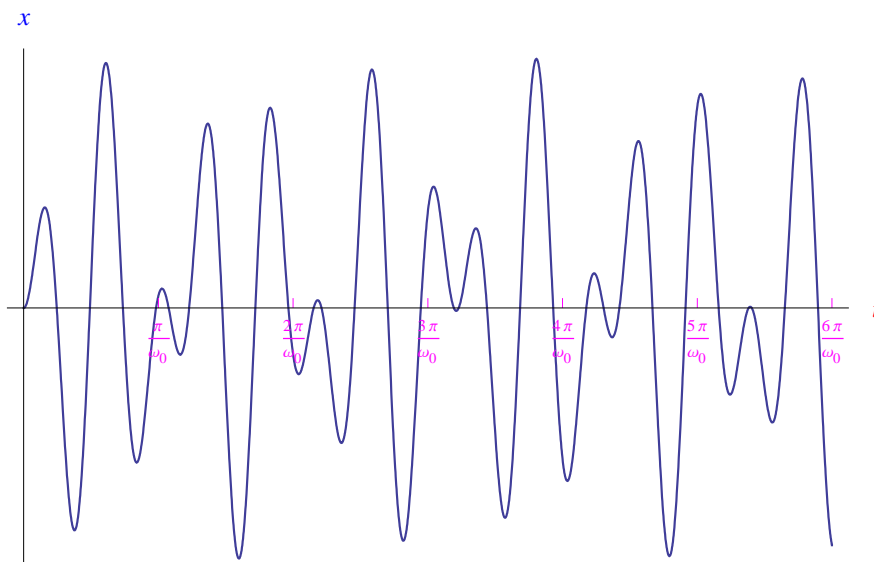


Figura 1.6: Grafico di $x(t) = \frac{F_M}{25-\pi^2} (\cos \pi t - \cos 5t)$, da cui vediamo che non è una funzione periodica del tempo t .

non è periodica. Ciò è confermato dal grafico di fig. (1.6).

Svincoliamoci dalla differenza a secondo membro della (1.27) utilizzando le formule di prostaferesi:

$$x(t) = \frac{2F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 + \Omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\right) \quad (1.33)$$

Poniamo

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 + \Omega}{2}, \quad \omega_2 = \frac{|\omega_0 - \Omega|}{2} \quad (1.34)$$

Cioè ω_1 è la media aritmetica delle frequenze angolari ω_0 (frequenza caratteristica) e Ω (frequenza della forza esterna), mentre ω_2 è il valore assoluto della loro differenza. Senza perdita di generalità supponiamo $\omega_0 > \Omega$ per cui

$$\omega_2 = \frac{\omega_0 - \Omega}{2}$$

e la (1.33) diventa:

$$x(t) = \frac{F_M}{2\omega_1\omega_2} \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \quad (1.35)$$

Per quanto precede è $\omega_0 > \Omega$. Supponiamo, in particolare:

$$\omega_0 \gtrsim \Omega \implies \omega_1 \sim \omega_0, \quad \omega_2 \ll \omega_1, \quad (1.36)$$

per cui

$$x(t) = A(t) \sin \omega_1 t, \quad (1.37)$$

avendo definito

$$A(t) = \frac{F_M}{2\omega_1\omega_2} \sin \omega_2 t \quad (1.38)$$

La (1.37) è un'oscillazione sinusoidale di pulsazione ω_1 , la cui ampiezza varia a sua volta con legge sinusoidale data dalla (1.38), ma con frequenza angolare ω_2 molto più bassa della ω_1 . Chiamiamo ω_2 *pulsazione di modulazione* (di ampiezza) e ω_1 *pulsazione base*. Abbiamo, dunque, una *modulazione di ampiezza* per ciò che riguarda l'andamento dell'ascissa $x(t)$ dell'oscillatore. Infatti:

$$|x(t)| = |A(t)| \underbrace{|\sin \omega_1 t|}_{\leq 1},$$

per cui

$$-A(t) \leq x(t) \leq A(t), \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (1.39)$$

Ne consegue che

$$\gamma_x = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t < +\infty, -A(t) \leq x \leq A(t)\},$$

essendo γ_x il diagramma orario dell'oscillatore, i.e. il diagramma cartesiano della funzione $x(t)$. Tale comportamento è noto con il nome di *fenomeno dei battimenti*. Ad esempio, per $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ e $\Omega = 90 \text{ rad/s}$, si ottiene l'andamento plottato in fig. 1.7.

Il fenomeno dei battimenti è ben noto in acustica musicale quando si suona la stessa nota con due strumenti diversi non ben accordati tra loro. Nel caso appena visto, affinché si verifichi un battimento è necessario che la frequenza base e la frequenza di modulazione siano molto diverse. In tal modo l'ampiezza dell'oscillazione risultante varia lentamente, dando l'impressione di essere quasi costante.

Mostriamo ora che il predetto fenomeno può essere illustrato in generale, cioè senza considerare grandezze che non siano necessariamente funzioni del tempo. Infatti, sussiste la seguente definizione:

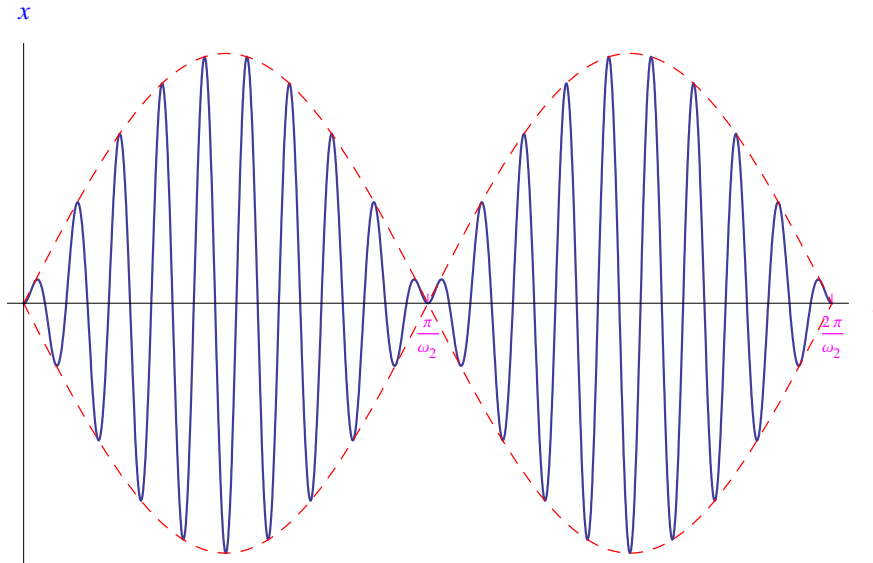


Figura 1.7: Ascissa $x(t)$ modulata in ampiezza. La frequenza caratteristica dell'oscillatore è $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$, mentre la frequenza della sollecitazione esterna è $\Omega = 90 \text{ rad/s}$. A tali valori corrispondono una frequenza di modulazione $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$ e una frequenza base $\omega_1 = 95 \text{ rad/s}$.

Definizione 2 Dicesi **battimento** una qualunque combinazione lineare di due funzioni sinusoidali di periodo T_1 e T_2 tali che

$$\frac{|T_2 - T_1|}{T_1} < \varepsilon, \quad \text{con } 0 < \varepsilon < 1 \tag{1.40}$$

Per fissare assumiamo

$$f_1(x) = \sin(\omega_1 x), \quad f_2(x) = \sin(\omega_2 x) \tag{1.41}$$

Sommiamo

$$f(x) = \sin(\omega_1 x) + \sin(\omega_2 x) \tag{1.42}$$

Per le formule di prostaferesi:

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x\right) = \sin(\omega'_1 x) + \sin(\omega'_2 x) \tag{1.43}$$

dove

$$\omega'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega'_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{per } \omega_1 > \omega_2 \tag{1.44}$$

In particolare assumiamo

$$\omega_1 = 1 \implies T_1 = 2\pi \tag{1.45}$$

$$\omega_2 = \lambda \lesssim 1 \implies T_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \gtrsim T_1$$

Segue

$$f(x) = A(x) \sin(\omega'_1 x), \tag{1.46}$$

dove

$$A(x) = 2 \cos(\omega'_2 x), \tag{1.47}$$

è l'ampiezza dell'oscillazione risultante.

Abbiamo visto che comunque prendiamo due funzioni sinusoidali

$$f_1(x) = \sin(\omega_1 x), \quad f_2(x) = \sin(\omega_2 x), \quad \text{con } \omega_1 \neq \omega_2, \quad (1.48)$$

una qualunque combinazione lineare

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x), \quad c_1, c_2 \in R, \quad (1.49)$$

è un battimento se è verificata la condizione

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad (1.50)$$

Senza perdita di generalità

$$f(x) \stackrel{def}{=} f_1(x) + f_2(x) = 2 \sin(\omega'_1 x) \cos(\omega'_2 x), \quad (1.51)$$

avendo applicato le formule di prostaferesi, per poi definire le nuove frequenze:

$$\omega'_1 \stackrel{def}{=} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \omega'_2 \stackrel{def}{=} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{per } \omega_1 > \omega_2 \quad (1.52)$$

Segue

$$f(x) = A(x) \sin(\omega'_1 x),$$

dove

$$A(x) = 2 \cos(\omega'_2 x), \quad (1.53)$$

è un involuppo di modulazione se è verificata la condizione

$$\omega'_2 \ll \omega'_1, \quad (1.54)$$

cioè se

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad (1.55)$$

Supponiamo ora che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ non siano funzioni sinusoidali, ma comunque periodiche e denotiamo con T_1 e T_2 i rispettivi periodi. Se tali funzioni verificano le condizioni di Dirichlet, possiamo scrivere i singoli sviluppi in serie di Fourier:

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(k\omega_1 x) + b_k \sin(k\omega_1 x)], \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1})$$

I coefficienti a_k, b_k sono dati da:

$$a_k = \frac{\omega_1}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_1} f_1(x) \cos(k\omega_1 x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

$$b_k = \frac{\omega_1}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_1} f_1(x) \sin(k\omega_1 x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Per $f_2(x)$:

$$f_2(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a'_k \cos(k\omega_2 x) + b'_k \sin(k\omega_2 x)], \quad (\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}) \quad (1.57)$$

con formule simili per i coefficienti di Fourier a'_k, b'_k . Ricordiamo che la somma $f_1(x) + f_2(x)$ è una funzione periodica se e solo se i periodi hanno in comune un multiplo minimo. Diversamente, non ha senso parlare di serie di Fourier associata alla funzione $f_1(x) + f_2(x)$. In ogni caso proviamo a troncare entrambi gli sviluppi a un conveniente ordine di approssimazione N , per poi sommarli:

$$f_1(x) + f_2(x) \simeq \frac{1}{2} (a_0 + a'_0) + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega_1 x) + a'_k \cos(k\omega_2 x)] + \quad (1.58)$$

$$+ \sum_{k=1}^N [b_k \sin(k\omega_1 x) + b'_k \sin(k\omega_2 x)]$$

Vediamo quindi che i termini delle sommatorie danno luogo a battimenti se $\omega_1 \sim \omega_2$. A titolo di esempio, consideriamo una funzione del tipo “dente di sega”

$$f_1(x) = \frac{1}{3} \arccos(\cos 2\pi x), \quad (1.59)$$

e un'altra del tipo “onda quadra”:

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 0.6 \\ -1, & \text{se } -0.6 \leq x < 0 \end{cases}, \quad (T_1 = 1.2) \quad (1.60)$$

plottate in fig. 1.8. Si noti che tali funzioni sono periodiche con periodi leggermente diversi. La loro somma è plottata in fig. 1.9.

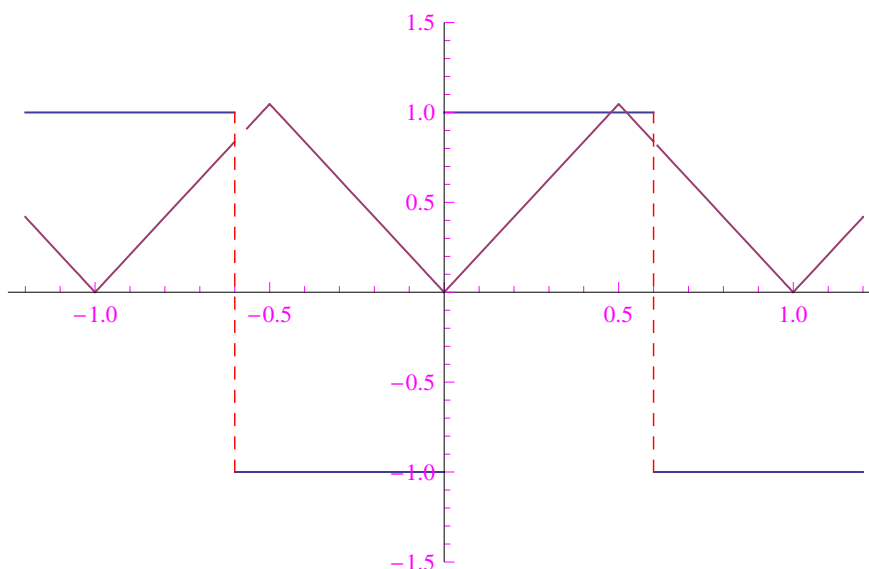


Figura 1.8: Andamento di un'onda quadra e di un dente di sega con periodi leggermente diversi.

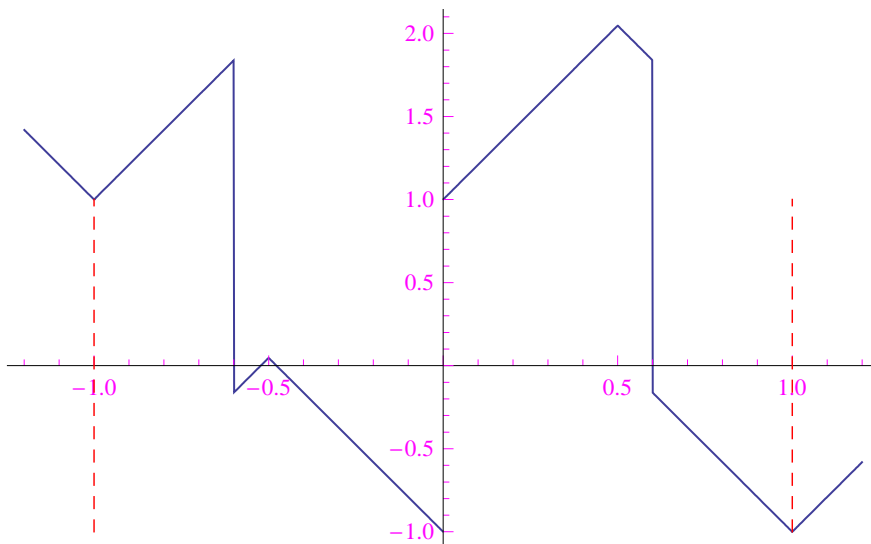


Figura 1.9: Andamento della somma delle funzioni precedenti.

Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione a onda quadra, troncato al termine del quint'ordine è:

$$0.63662 \sin\left(\frac{\pi}{0.3}x\right) + 0.212207 \sin\left(\frac{3\pi}{0.3}x\right) + 0.127324 \sin\left(\frac{5\pi}{0.3}x\right), \quad (1.61)$$

mentre lo sviluppo in serie di Fourier della funzione a denta di sega, troncato al termine del quint'ordine è:

$$\frac{\pi}{6} - \frac{4}{3\pi} \cos(2\pi x) - \frac{4}{27\pi} \cos(6\pi x) - \frac{4}{75\pi} \cos(10\pi x) \quad (1.62)$$

La loro somma è plottata in fig. 1.10.

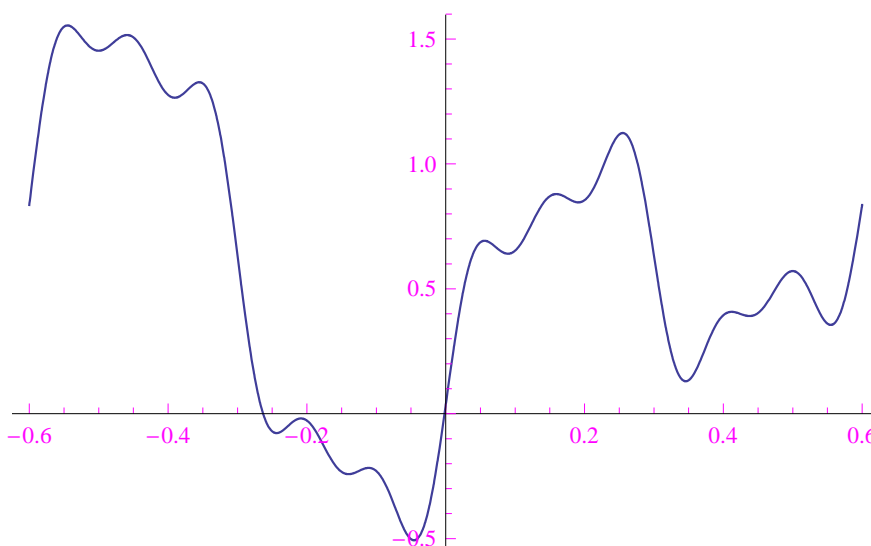


Figura 1.10: Andamento della somma degli sviluppi in serie di Fourier troncati al termine del quint'ordine.

1.3 Lo spazio delle configurazioni

L'evoluzione dinamica di un sistema meccanico composto da un punto materiale che si muove lungo una retta (asse x) può essere studiata in due paradigmi diversi:

1. Evoluzione nel dominio del tempo.
2. Evoluzione nel dominio delle configurazioni.

Nel primo paradigma, una volta determinata l'equazione oraria $x = x(t)$, e quindi la sua derivata rispetto al tempo $\dot{x} = \dot{x}(t)$, si traccia il grafico delle funzioni $x(t)$ e $\dot{x}(t)$.

Nel secondo approccio, invece, l'evoluzione dinamica viene rappresentata in uno spazio astratto 2-dimensionale denominato *spazio delle configurazioni*. Per poter definire tale ente geometrico, iniziamo con l'osservare che l'equazione differenziale del moto derivante dal secondo principio della dinamica:

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \quad (1.63)$$

dove

$$f(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}), \quad (1.64)$$

essendo m la massa del punto materiale e $F(t, x, \dot{x})$ la forza applicata. L'equazione differenziale (1.63) è del secondo ordine ed è equivalente a un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Infatti, se in tale equazione differenziale eseguiamo il cambio di variabili:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \dot{x} \end{cases}, \quad (1.65)$$

si ha

$$\dot{\eta} = \ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

Quindi

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = f(t, \xi, \eta) \end{cases}, \quad (1.66)$$

che è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nelle funzioni incognite $\xi(t)$, $\eta(t)$. La totalità delle coppie ordinate $(\xi, \eta) \equiv (x, \dot{x})$ che soddisfano il sistema (1.66) appartengono allo spazio euclideo \mathbb{R}^2 cartesianamente rappresentabile da un sistema di assi coordinati $(Ox\dot{x})$. Abbiamo così definito lo *spazio delle configurazioni* del sistema meccanico assegnato, la cui evoluzione dinamica è geometricamente rappresentata dal moto del punto (x, \dot{x}) lungo una curva Γ che definisce la regione dello spazio delle configurazioni accessibile al sistema, ed è nota come *orbita* del sistema medesimo. Una rappresentazione parametrica di Γ è

$$x = x(t), \quad \dot{x} = \dot{x}(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1.67)$$

ove la funzione $x(t)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (1.68)$$

La coppia ordinata (x, \dot{x}) definisce lo *stato* del sistema meccanico. Il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni del predetto problema di Cauchy implica il determinismo fisico: lo stato meccanico a tutti i tempi è univocamente determinato dallo stato meccanico iniziale e dalla forza agente sul punto materiale.

Nel caso particolare delle oscillazioni libere di un oscillatore armonico ideale, abbiamo visto che l'equazione oraria è

$$x(t) = A \cos \omega_0 t, \tag{1.69}$$

dove $A > 0$ è l'allungamento iniziale della molla mentre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ è la pulsazione. La velocità scalare è

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t \tag{1.70}$$

da cui otteniamo le equazioni parametriche dell'orbita:

$$\Gamma : x = A \cos \omega_0 t, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t \tag{1.71}$$

In questo caso è possibile eliminare il parametro t , ottenendo la rappresentazione ordinaria di Γ :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1,$$

ovvero un'ellisse di semiassi $a = A$, $b = \omega_0 A$, come illustrato in fig. 1.11.

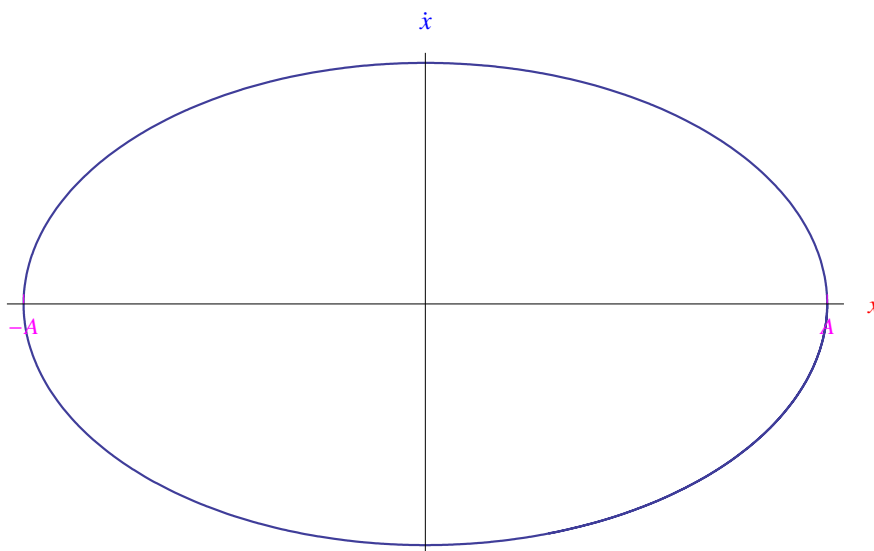


Figura 1.11: Orbita di un oscillatore armonico di elongazione A e pulsazione ω_0 . Quando $|x| = A$ la velocità è nulla. Per $x = 0$, invece, $|v|$ assume il massimo valore. L'evoluzione dinamica di questo sistema è deterministica, poiché l'orbita è univocamente determinata dallo stato iniziale $x_0 = A$, $v_0 = 0$.

Passiamo ora al caso delle oscillazioni forzate. Ricordiamo che se l'oscillatore è inizialmente a riposo nella posizione di equilibrio ed è soggetto a una forza per unità di massa $f(t) = F_M \cos \Omega t$, la sua equazione oraria è

$$x(t) = \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t), \tag{1.72}$$

da cui ricaviamo immediatamente la rappresentazione parametrica dell'orbita:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t) \\ \dot{x} = \frac{F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\omega_0 \sin \omega_0 t - \Omega \sin \Omega t) \end{cases}, \tag{1.73}$$

il cui andamento dipende dalla frequenza Ω della forza esterna. Nel caso speciale $\Omega = 0$, cioè forza costante $F(t) = F_M$, si ottiene un'ellisse del tipo mostrata in fig. 1.12. Al crescere di Ω l'ellisse subisce delle traslazioni lungo l'asse delle ascisse fino a sdoppiarsi, per poi separarsi. Più precisamente, nelle figg. 1.13)– (1.14)– (1.15)– (1.16) è tracciata l'orbita in intervalli di tempo crescenti.

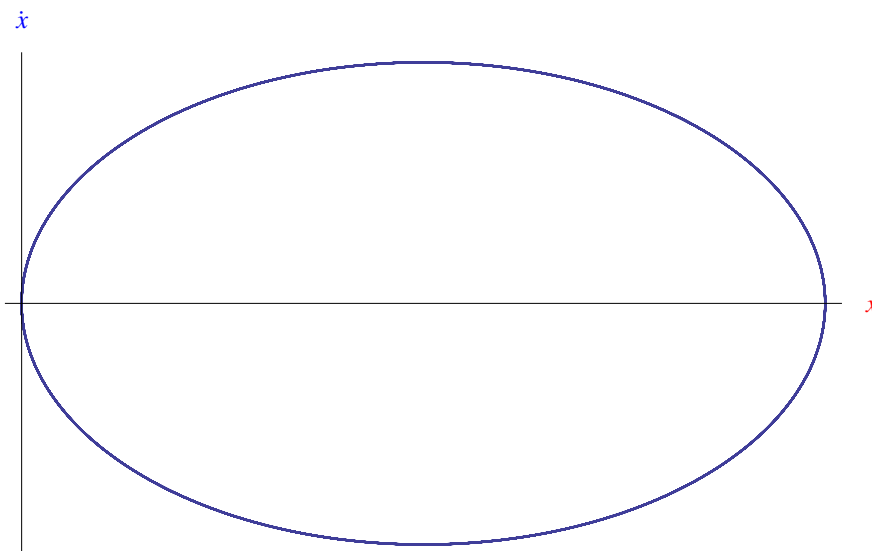


Figura 1.12: Orbita di un oscillatore armonico di elongazione A e pulsazione ω_0 , sottoposto a una forza costante F_M .

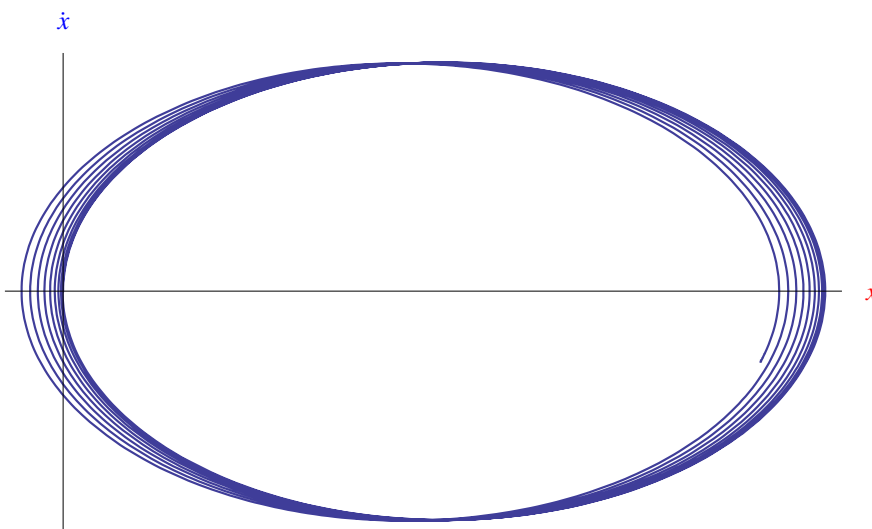


Figura 1.13: Orbita di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 0.6$ rad/s e pulsazione della forza esterna $\Omega = 5 \times 10^{-3}$ rad/s nell'intervallo di tempo $[0, 100$ s].

Al crescere di Ω l'orbita diviene più complessa. Ad esempio per $\Omega = 0.29$ rad/s (con $\omega_0 = 0.6$ rad/s) si ha il grafico di fig. 1.17. Per $\Omega = 0.59$ rad/s si verifica il fenomeno dei battimenti la cui orbita è in fig. 1.18.

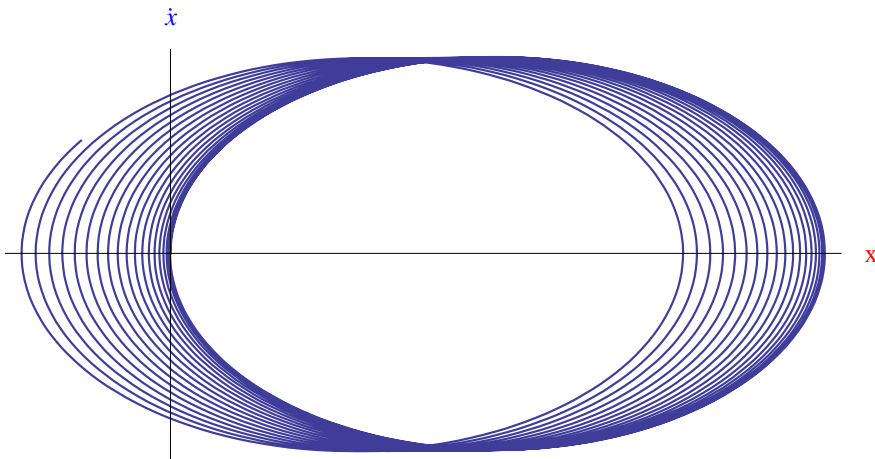


Figura 1.14: Orbita di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 0.6 \text{ rad/s}$ e pulsazione della forza esterna $\Omega = 5 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ nell'intervallo di tempo $[0, 200 \text{ s}]$.

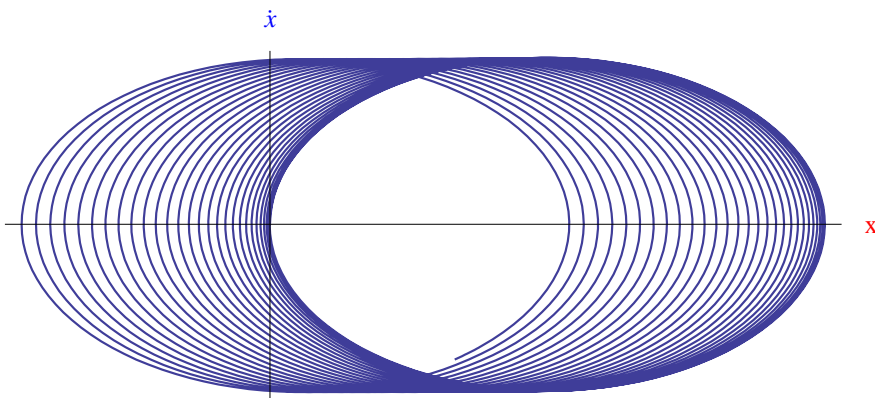


Figura 1.15: Orbita di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 0.6 \text{ rad/s}$ e pulsazione della forza esterna $\Omega = 5 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ nell'intervallo di tempo $[0, 300 \text{ s}]$.

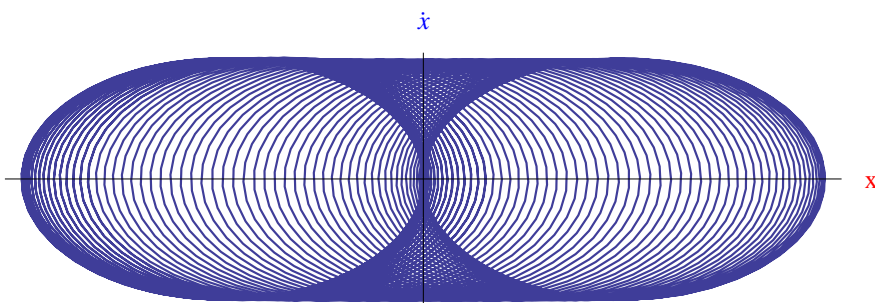


Figura 1.16: Orbita di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 0.6 \text{ rad/s}$ e pulsazione della forza esterna $\Omega = 5 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ nell'intervallo di tempo $[0, 800 \text{ s}]$.

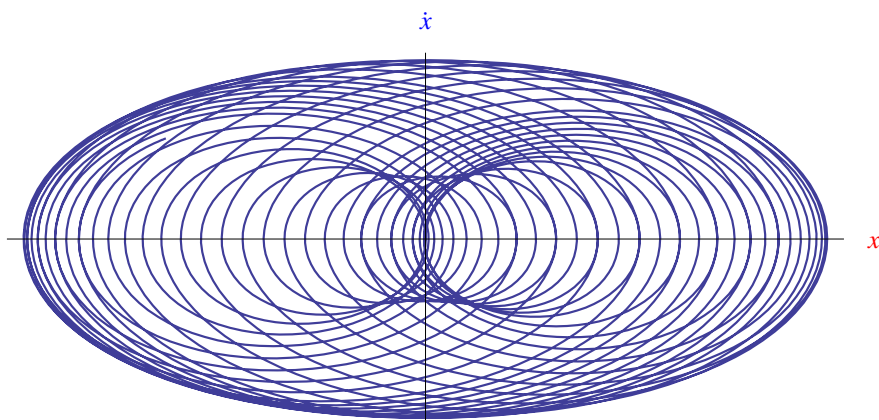


Figura 1.17: Orbita di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 0.6$ rad/s. sottoposto a una forza esterna di pulsazione $\Omega = 0.29$ rad/s.

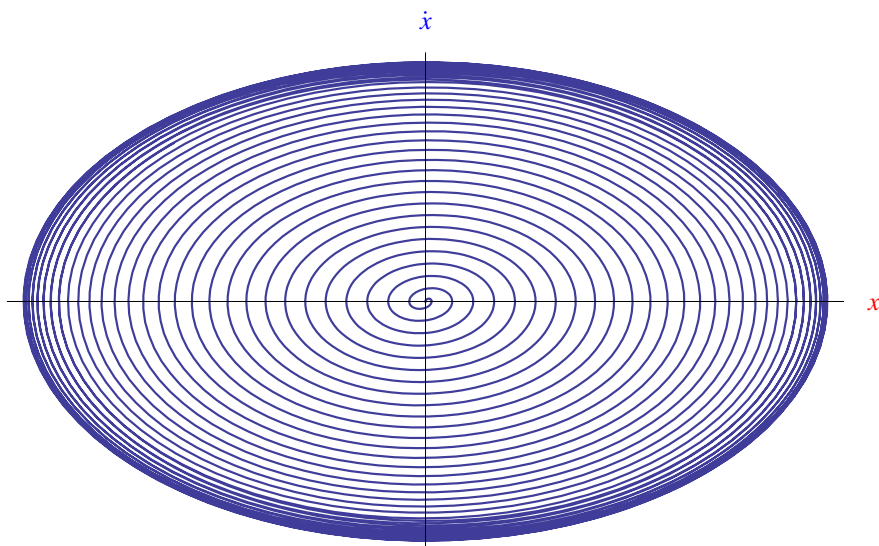


Figura 1.18: Orbita di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega_0 = 0.6$ rad/s. sottoposto a una forza esterna di pulsazione $\Omega = 0.59$ rad/s.

1.4 Risonanza

Consideriamo nuovamente il caso delle oscillazioni forzate

$$x(t) = F_M \frac{\cos \Omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (1.74)$$

Supponendo di poter variare la frequenza Ω si ha:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \frac{0}{0} \quad (1.75)$$

Per rimuovere tale forma indeterminata applichiamo le formule di prostaferesi per ottenere:

$$x(t) = \frac{2F_M}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 + \Omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\right) \quad (1.76)$$

Segue

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} x(t) &= 2F_M \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{1}{(\omega_0 - \Omega)(\omega_0 + \Omega)} \sin\left(\frac{\omega_0 + \Omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\right) \right] \\ &= \frac{F_M}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\right)}{\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t} \cdot \frac{t}{2} \right] \\ &= \frac{t}{2} \cdot \frac{F_M}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \underbrace{\lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t\right)}{\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t}}_{=1} \\ &= \frac{F_M}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1.77)$$

L'uguaglianza

$$\omega_0 = \Omega \quad (1.78)$$

esprime la condizione di *risonanza*. Per quanto precede, in condizioni di risonanza l'equazione oraria dell'oscillatore armonico si scrive:

$$x(t) = A(t) \sin \omega_0 t, \quad (1.79)$$

dove l'ampiezza $A(t)$ cresce linearmente nel tempo

$$A(t) = \frac{F_M}{2\omega_0} t \quad (1.80)$$

In fig. 1.19 riportiamo il diagramma orario. La velocità è

$$\dot{x}(t) = \frac{F_M}{2\omega_0} (\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t) \quad (1.81)$$

E quindi l'orbita dell'oscillatore risonante

$$\Gamma : x = \frac{F_M}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), \quad \dot{x} = \frac{F_M}{2\omega_0} (\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t), \quad (1.82)$$

graficata in fig. 1.20.

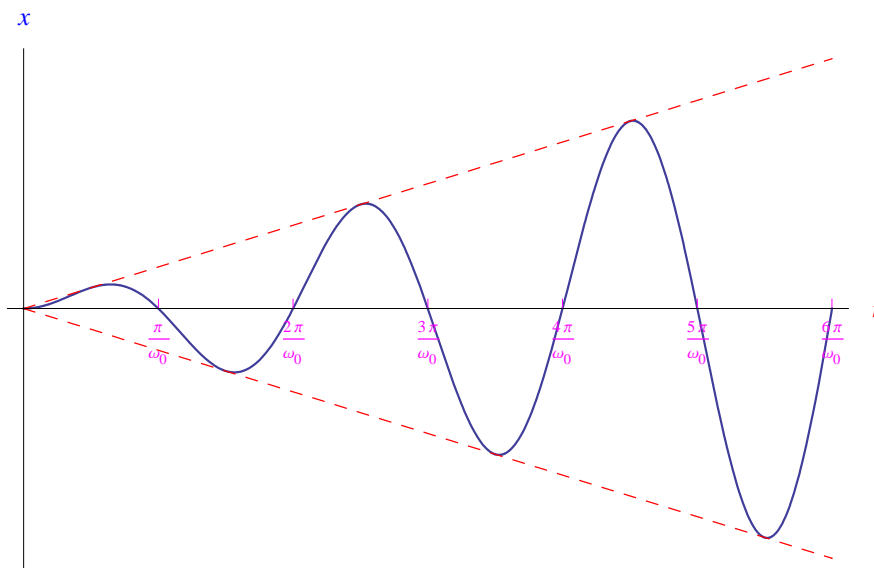


Figura 1.19: Diagramma orario di un oscillatore armonico in condizioni di risonanza. L'ascissa oscilla con ampiezza linearmente crescente fino a quando la molla si spezza.

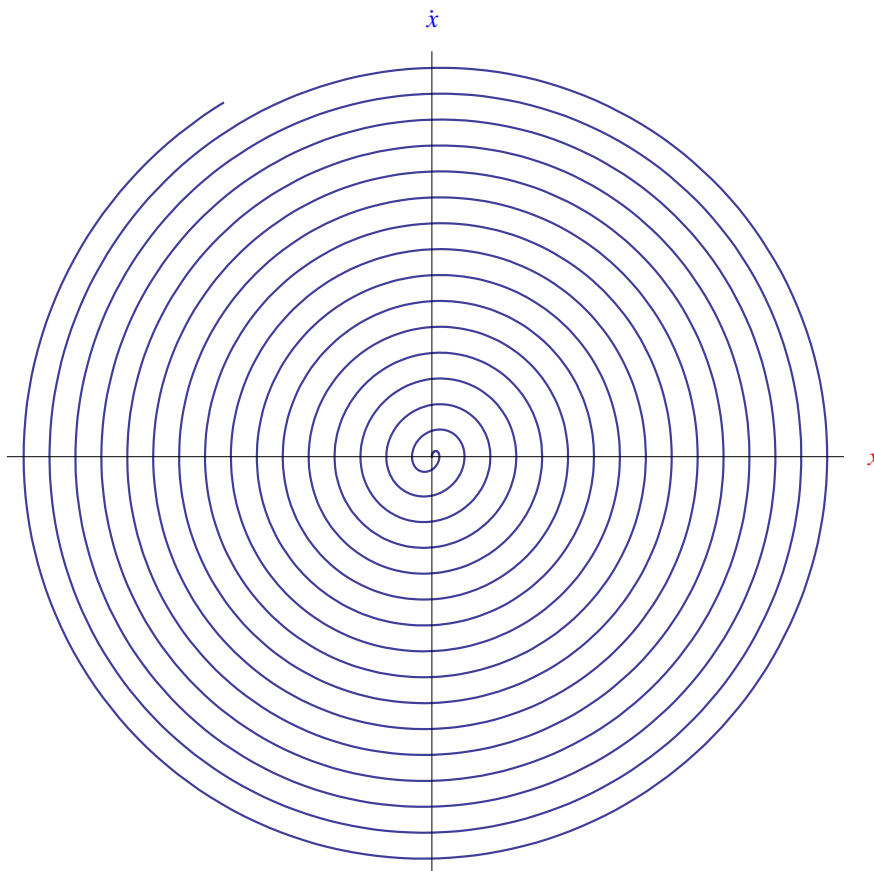


Figura 1.20: Orbita di un oscillatore risonante.

Mostriamo ora, per via computazionale, che la risonanza è un caso particolare di battimento. Più precisamente, le frequenze delle oscillazioni componenti coincidono, ma il termine a denominatore

$$\omega_0^2 - \Omega^2,$$

che si annulla assieme al numeratore dando luogo alla forma indeterminata $0/0$, fa in modo che l'ampiezza dell'involucro di modulazione sia una funzione linearmente crescente del tempo. In altri termini, mentre in un qualunque battimento la predetta ampiezza varia sinusoidalmente nel tempo, ora cresce in funzione di t . Ciò può essere visto graficando l'ascissa per valori di Ω molto vicini a ω_0 , come illustrato nei grafici di fig. 1.21-1.22.

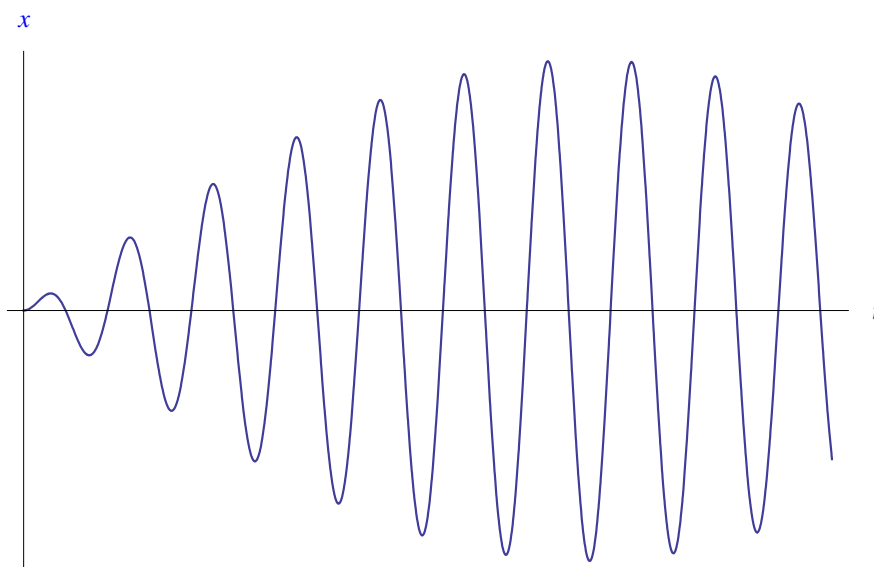


Figura 1.21: Ascissa di un oscillatore in cui $\Omega = 0.928\omega_0$. È visibile una modulazione di ampiezza con legge sinusoidale, quindi un battimento.

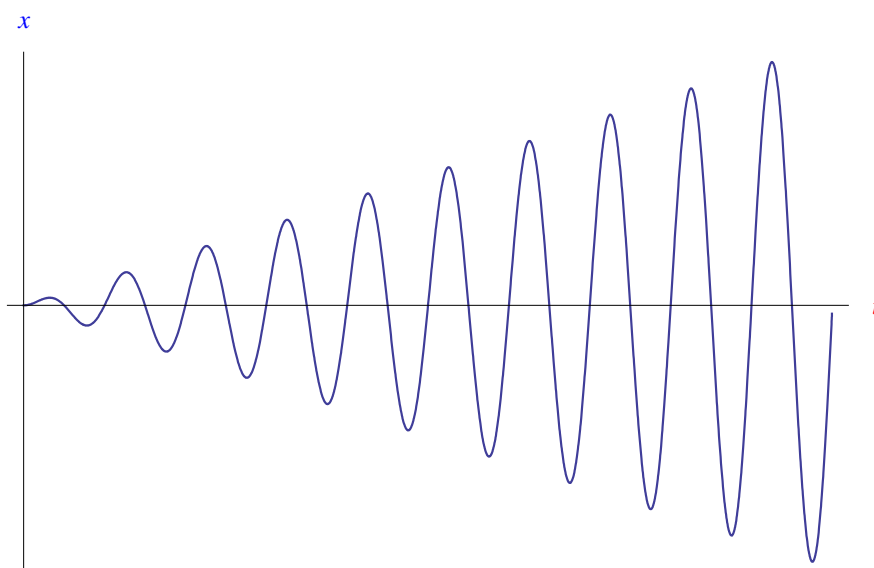


Figura 1.22: Ascissa di un oscillatore in cui $\Omega = 0.999\omega_0$. La modulazione di ampiezza non è più sinusoidale, ma lineare. L'oscillatore è quasi risonante.

In fig. 1.23 riportiamo il diagramma delle orbite per $\Omega = 0.09\omega_0$.

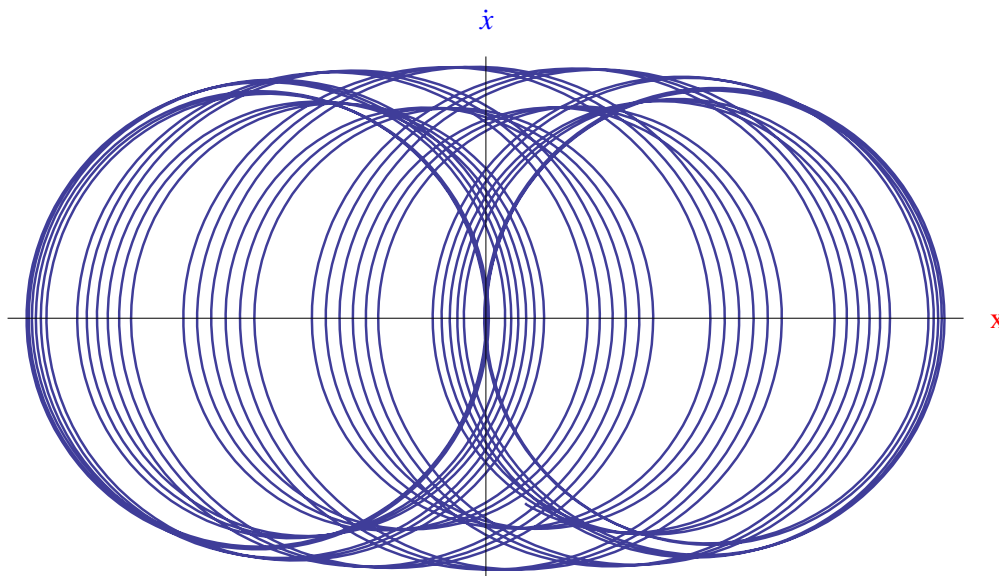


Figura 1.23: Orbita di un oscillatore con $\Omega = 0.09\omega_0$. Siamo lontani dalla risonanza.

1.5 Forza periodica ma non sinusoidale. Sviluppo in serie di Fourier

Applichiamo a un oscillatore armonico ideale di massa m e frequenza caratteristica ω_0 , una forza $F(t)$ che sia una qualunque funzione periodica del tempo di periodo T :

$$F(t + kT) = F(t), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.83)$$

Il secondo principio della dinamica si scrive:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1.84)$$

Al solito $f(t) = F(t)/m$ è la forza per unità di massa. Se tale funzione verifica le **condizioni di Dirichlet**, la sua serie di Fourier converge alla funzione medesima, per cui

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(\Omega_k t) + b_k \sin(\Omega_k t)] \quad (1.85)$$

dove

$$\Omega_k \stackrel{def}{=} k\Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (1.86)$$

con

$$\Omega = \frac{2\pi}{T},$$

pulsazione della forza applicata dell'oscillatore. I coefficienti a_k, b_k sono i **coefficienti di Fourier**:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\Omega_k t) dt = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} f(t) \cos(\Omega_k t) dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\Omega_k t) dt = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} f(t) \sin(\Omega_k t) dt, \quad (k = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

Sostituendo la (1.85) nel secondo membro della (1.84):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(\Omega_k t) + b_k \sin(\Omega_k t)], \tag{1.88}$$

Se $x(t)$ è un integrale particolare, la linearità della (1.84) ci consente di scrivere:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [A_k \cos(\Omega_k t) + B_k \sin(\Omega_k t)] \tag{1.89}$$

che può essere riscritta come

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k(t), \tag{1.90}$$

avendo posto per definizione

$$x_0 = \frac{A_0}{2}, \quad x_k(t) = A_k \cos(\Omega_k t) + B_k \sin(\Omega_k t) \tag{1.91}$$

Imponiamo che (1.89) sia una soluzione di (1.88). A tale scopo supponiamo che la regolarità delle funzioni coinvolte sia tale da rendere possibile una derivazione termine a termine della serie di Fourier. Quindi:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} [-A_k \Omega_k \sin(\Omega_k t) + B_k \Omega_k \cos(\Omega_k t)] \\
 \ddot{x}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} [-A_k \Omega_k^2 \cos(\Omega_k t) - B_k \Omega_k^2 \sin(\Omega_k t)]
 \end{aligned} \tag{1.92}$$

Con tali sviluppi la (1.88) diventa:

$$\begin{aligned}
 &\omega_0^2 x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(-\Omega_k^2 A_k + \omega_0^2 A_k) \cos(\Omega_k t) + (-\Omega_k^2 B_k + \omega_0^2 B_k) \sin(\Omega_k t)] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(\Omega_k t) + b_k \sin(\Omega_k t)]
 \end{aligned}$$

Segue

$$x_0 = \frac{a_0}{2\omega_0^2},$$

e per $k \geq 1$:

$$(-\Omega_k^2 A_k + \omega_0^2 A_k) \cos(\Omega_k t) + (-\Omega_k^2 B_k + \omega_0^2 B_k) \sin(\Omega_k t) = a_k \cos(\Omega_k t) + b_k \sin(\Omega_k t)$$

Cioè

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega_k^2) A_k = a_k \\ (\omega_0^2 - \Omega_k^2) B_k = b_k \end{cases} \quad (1.93)$$

da cui ricaviamo i coefficienti di Fourier della soluzione $x(t)$ in funzione dei coefficienti di Fourier della sollecitazione applicata:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{a_k}{\omega_0^2 - \Omega_k^2} \\ B_k &= \frac{b_k}{\omega_0^2 - \Omega_k^2} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Quindi

$$x_{k \geq 1}(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega_k^2} [a_k \cos(\Omega_k t) + b_k \sin(\Omega_k t)] \quad (1.95)$$

Finalmente

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega_k^2} [a_k \cos(\Omega_k t) + b_k \sin(\Omega_k t)], \quad (1.96)$$

che è una conseguenza della linearità dell'equazione differenziale (1.88). Quest'ultima è a sua volta la formulazione matematica del *principio di sovrapposizione lineare degli effetti*. Ne consegue che la componente k -esima dello sviluppo di Fourier di $f(t)$ va interpretata come una singola sollecitazione sinusoidale. Tuttavia è lecito troncare lo sviluppo di Fourier – e quindi il numero di generatori – a un termine $n > 1$, il cui ordine di grandezza dipende dalla funzione $f(t)$. Ad esempio, consideriamo

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \arccos[\cos(2\pi t)], \quad (1.97)$$

che è periodica di periodo $T = 1$ s, per cui la pulsazione è $\Omega = 1$ rad/s. Calcoliamo con Mathematica lo sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$ arrestato al termine del quint'ordine:

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(2\pi t) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(6\pi t) - \frac{4}{25\pi^2} \cos(10\pi t) \quad (1.98)$$

Dal grafico di fig. 1.24 vediamo che l'approssimazione è abbastanza accettabile. La (1.96) restituisce

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \frac{1}{2\omega_0^2} - \frac{4}{\pi^2(\omega_0^2 - 4\pi^2)} \cos(2\pi t) - \frac{4}{9\pi^2(\omega_0^2 - 36\pi^2)} \cos(6\pi t) - \\ &\quad - \frac{4}{25\pi^2(\omega_0^2 - 100\pi^2)} \cos(10\pi t), \end{aligned} \quad (1.99)$$

dove abbiamo lasciato ω_0 come parametro libero. Ad esempio, per $\omega_0 = 20$ rad/s cioè lontani dalla risonanza nelle singole componenti di Fourier, otteniamo il grafico di fig. 1.25. In ogni caso questo valore della frequenza sembra interessante, come possiamo vedere dallo strano andamento per $\omega_0 = 15$ rad/s riportato in fig. 1.26.

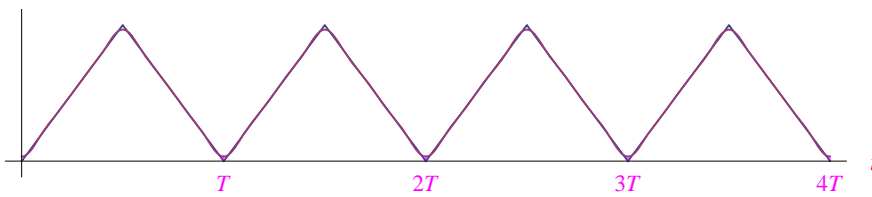


Figura 1.24: Confrontiamo la funzione $f(t) = \frac{1}{\pi} \arccos[\cos(2\pi t)]$ con il suo sviluppo in serie di Fourier troncato al termine del quint'ordine. I grafici sono quasi sovrapposti.

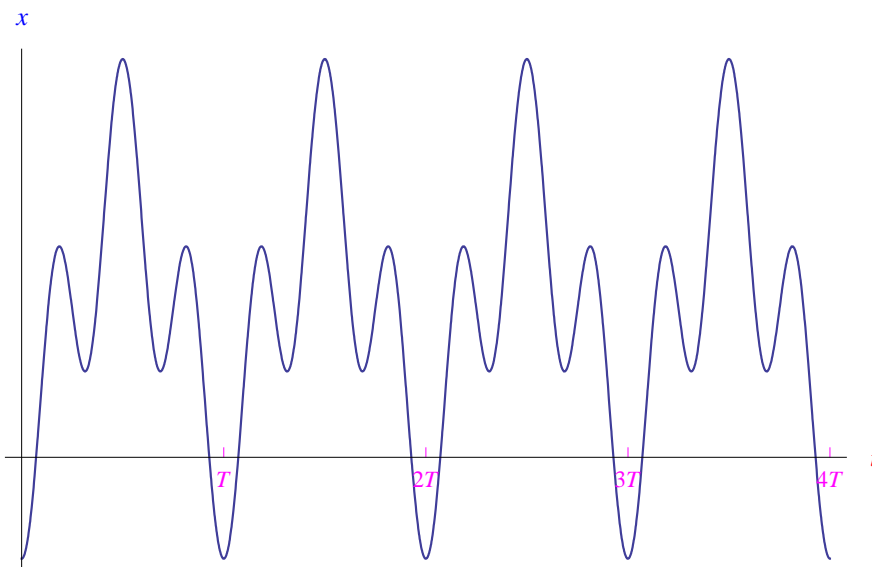


Figura 1.25: Ascissa dell'oscillatore per $\omega_0 = 20\text{rad/s}$.

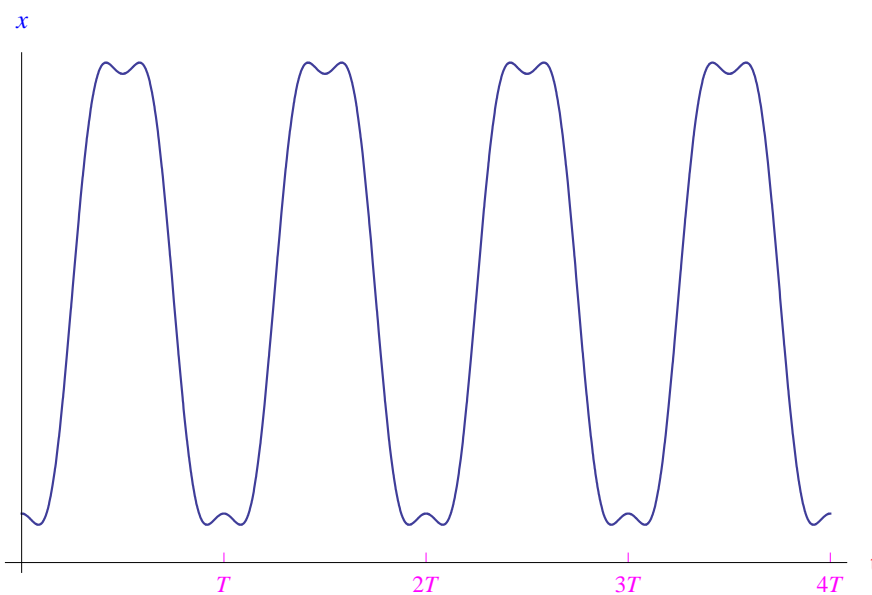


Figura 1.26: Ascissa dell'oscillatore per $\omega_0 = 15\text{rad/s}$.

Migliorando il tiro...

Lo sviluppo in serie di Fourier di

$$f(t) = \frac{F_M}{\pi} \arccos[\cos(2\pi t)],$$

arrestato al termine del quinto ordine è:

$$f(t) = F_M \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\Omega_1 t) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(\Omega_3 t) - \frac{4}{25\pi^2} \cos(\Omega_5 t) \right], \quad (1.100)$$

dove

$$\Omega_1 = 2\pi \text{ rad/s}, \quad \Omega_3 = 3\Omega_1 = 6\pi \text{ rad/s}, \quad \Omega_5 = 5\Omega_1 = 10\pi \text{ rad/s} \quad (1.101)$$

Quindi l'ascissa dell'oscillatore

$$x(t) = \frac{F_M}{2\omega_0^2} + F_M \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1,3,5} \frac{\cos(\Omega_k t)}{\omega_0^2 - \Omega_k^2} \quad (1.102)$$

Segue che se la frequenza angolare dell'oscillatore è prossima alla frequenza di una delle componenti di Fourier considerate, cioè se

$$\exists k \in \{1, 3, 5\} \mid \omega_0 \sim \Omega_k,$$

l'oscillatore risona alla frequenza Ω_k , giacché nello sviluppo di Fourier (arrestato al termine del quint'ordine) il termine dominante è

$$F_M \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{\cos(\Omega_k t)}{\omega_0^2 - \Omega_k^2}, \quad (1.103)$$

per cui

$$x(t) \sim_M \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{\cos(\Omega_k t)}{\omega_0^2 - \Omega_k^2} \quad (1.104)$$

Nel caso contrario, cioè se

$$|\omega_0 - \Omega_k| \gg \varepsilon, \quad \forall k \in \{1, 3, 5\},$$

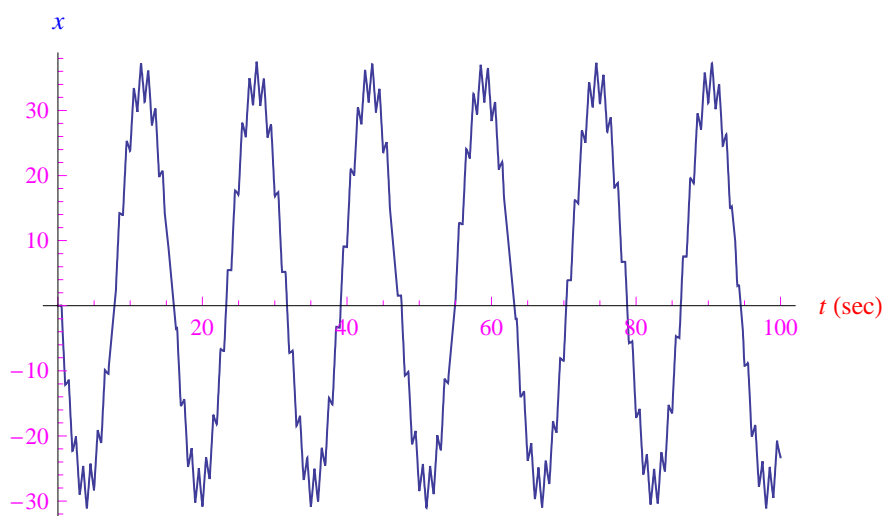
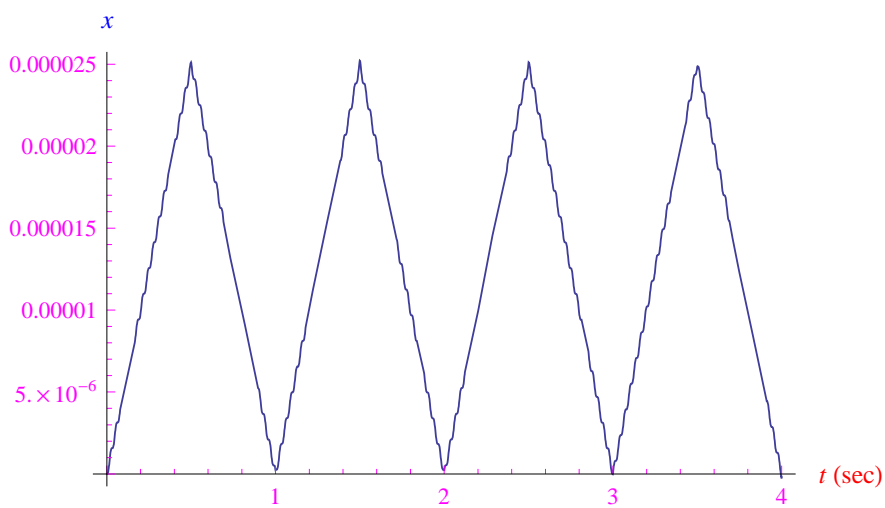
l'ascissa dell'oscillatore è una sovrapposizione lineare delle oscillazioni sinusoidali componenti. A questo punto vale la pena confrontare la soluzione approssimata ottenuta troncando la serie di Fourier ad un ordine opportuno, con la soluzione esatta. Ovvero:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_M}{\pi} \arccos[\cos(2\pi t)] \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.105)$$

la cui soluzione è

$$x(t) = -\frac{F_M}{\pi\omega_0^2} \arccos[\cos(2\pi t)] - \frac{2F_M}{\omega_0^3} \sin(\omega_0 t), \quad (1.106)$$

che può essere graficata per differenti valori di ω_0 . Ad esempio, per $\omega_0 = 0.4 \text{ rad/s}$ otteniamo il grafico di fig. 1.27. Sembra tuttavia che l'andamento triangolare della sollecitazione esterna venga riprodotto solo per $\omega_0 \rightarrow +\infty$, come mostrato in fig. 1.28.

Figura 1.27: Ascissa dell'oscillatore per $\omega_0 = 0.2rad/s$.Figura 1.28: Ascissa dell'oscillatore per $\omega_0 = 200rad/s$.

1.6 Forze variabili nel tempo (oscillatore armonico). Forme d'onda (circuito elettrico)

Abbiamo esaminato il caso di un punto materiale di massa m sottoposto a una forza elastico di richiamo (caso unidimensionale) e ad una forza periodica del tempo:

$$F(t) = mf(t), \quad (1.107)$$

dove

$$f(t) = \frac{F_M}{\pi} \arccos(\cos \Omega t), \quad (1.108)$$

essendo $\Omega > 0$ la frequenza angolare (o pulsazione) di $F(t)$. L'equazione differenziale del moto si scrive:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_M}{\pi} \arccos(\cos \Omega t) \quad (1.109)$$

Ricordiamo che $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ è la pulsazione caratteristica dell'oscillatore. Notiamo poi che l'equivalente elettrico di tale sistema meccanico è un circuito i cui componenti sono rispettivamente un'induttanza di coefficiente di auto-induzione L e un condensatore di capacità C . Dal momento che ci troviamo in condizioni di idealità i.e. stiamo trascurando le forze di attrito nell'oscillatore meccanico, segue che nell'analogo elettrico il condensatore e l'induttanza non presentano una resistenza ohmica. Eseguendo la nota sostituzione:

$$m \rightarrow L, \quad k \rightarrow \frac{1}{C}, \quad x \rightarrow q \quad (1.110)$$

si perviene all'equazione differenziale che regola l'andamento della carica elettrica:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{V(t)}{L}, \quad (\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}), \quad (1.111)$$

in cui abbiamo lasciata inespresa l'espressione analitica della funzione $V(t)$ che è la f.e.m. che alimenta la serie LC (è il "corrispondente" della forza $F(t)$ applicata all'oscillatore meccanico). Integrando la predetta equazione differenziale per assegnate condizioni iniziali, si perviene alla funzione $q(t)$ e quindi all'intensità di corrente:

$$i(t) = \dot{q}(t) \quad (1.112)$$

Qualche perplessità può insorgere dall'utilizzo della funzione:

$$\arccos(\cos \Omega t), \quad (1.113)$$

nel senso che si è portati erroneamente a scrivere (per definizione di **funzione inversa**)

$$\arccos(\cos \Omega t) = \Omega t \quad (1.114)$$

Per maggiore chiarezza riferiamoci al caso più astratto:

$$\arccos(\cos x) \quad (1.115)$$

Osserviamo innanzitutto che le **funzioni circolari** sono invertibili solo localmente, ovvero in un qualunque intervallo di periodicità, in quanto non sono strettamente monotone su tutto l'insieme di definizione. Nel caso delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ ci si riferisce all'intervallo $[-\pi, \pi]$, da cui l'andamento della funzione inversa $\arccos x$ riportato in fig. 1.29.

Ciò premesso, studiamo la funzione:

$$f(x) = \arccos(\cos \Omega x), \quad (\Omega > 0) \quad (1.116)$$

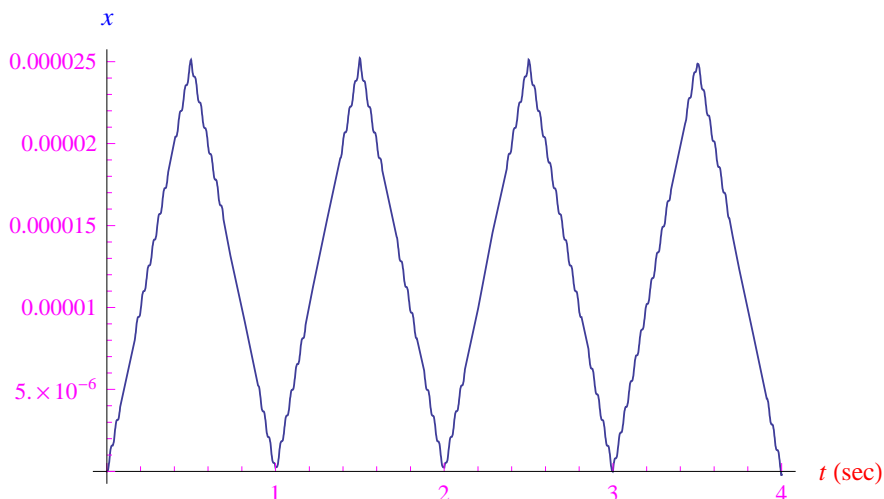


Figura 1.29: Grafico della funzione $\arccos x$.

• **Insieme di definizione**

È manifestamente $X = \mathbb{R}$, giacchè $|\cos \Omega x| \leq 1$.

• **Periodicità**

La funzione è periodica di periodo $T = 2\pi/\Omega$, onde studiamo la funzione in

$$X_0 = \left[-\frac{\pi}{\Omega}, \frac{\pi}{\Omega}\right]$$

• **Parità**

La funzione è pari, per cui $\Gamma_f : y = f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y . Quindi studiamo la funzione in $X'_0 = \left[0, \frac{\pi}{\Omega}\right]$.

• **Grafico**

Risulta

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{\Omega}\right] \implies \arccos(\cos \Omega x) = \Omega x \tag{1.117}$$

Ne consegue che in X'_0 il grafico è il segmento di estremi $(0,0)$ e $A(\pi/\Omega, \pi)$. La simmetria rispetto all'asse y e la periodicità ci permettono di tracciare il grafico in \mathbb{R} come riportato in fig. 1.30

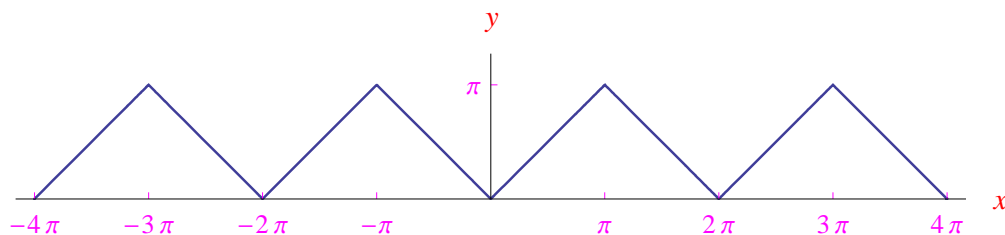


Figura 1.30: Grafico di $f(x) = \arccos(\cos x)$.

Ritorniamo al caso dell'oscillatore

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_M}{\pi} \arccos [\cos (\Omega t)] \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.118)$$

o al caso matematicamente equivalente della serie LC alimentata dalla f.e.m.

$$V(t) = V_M \arccos (\cos \Omega t),$$

onde

$$\begin{cases} \ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{V_M}{\pi L} \arccos (\cos \Omega t) \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.119)$$

Avevamo visto che la soluzione segue l'andamento triangolare solo per $\omega_0 \rightarrow +\infty$. Consideriamo allora il caso particolare $\omega_0 = 0$ che descrive un punto materiale soggetto alla sola forza periodica $F(t)$. Nel caso elettrico, ci corrisponde a $C = 0$. Cioè abbiamo una induttanza alimentata dalla $V(t)$. Per l'oscillatore meccanico l'equazione differenziale del moto può scriversi:

$$\dot{v} = \frac{F_M}{\pi} \arccos (\cos \Omega t), \quad (1.120)$$

dove $v = \dot{x}$ è la velocità. Integrando otteniamo la posizione:

$$x(t) = \frac{F_M}{\Omega} \int_0^t \arccos (\cos \Omega t') dt' \quad (1.121)$$

Calcoliamo l'integrale

$$I(t) = \int_0^t \arccos (\cos \Omega t') dt', \quad (1.122)$$

eseguendo il cambio di variabile

$$x = \Omega t' \implies dt' = \frac{dx}{\Omega}, \quad 0 \leq t' = \frac{x}{\Omega} \leq t, \quad (1.123)$$

onde integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega t} \arccos (\cos x) dx \\ &= \frac{1}{\Omega} \left[x \arccos (\cos x) \Big|_0^{\Omega t} - \int_0^{\Omega t} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx \right] \end{aligned} \quad (1.124)$$

Osserviamo che

$$\int_0^{\Omega t} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2, & \text{se } \sin x > 0 \\ -\frac{1}{2} x^2, & \text{se } \sin x < 0 \end{cases} \quad (1.125)$$

Cioè

$$\int_0^{\Omega t} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{\sin x}{|\sin x|} \quad (1.126)$$

Segue

$$I(t) = \frac{1}{\Omega} \left[\Omega t \arccos (\cos \Omega t) - \frac{1}{2} \Omega^2 t^2 \frac{\sin \Omega t}{|\sin (\Omega t)|} \right] \quad (1.127)$$

Quindi

$$v(t) = \frac{F_M}{\pi \Omega} \left[\Omega t \arccos (\cos \Omega t) - \frac{1}{2} \Omega^2 t^2 \operatorname{sign} (\sin \Omega t) \right], \quad (1.128)$$

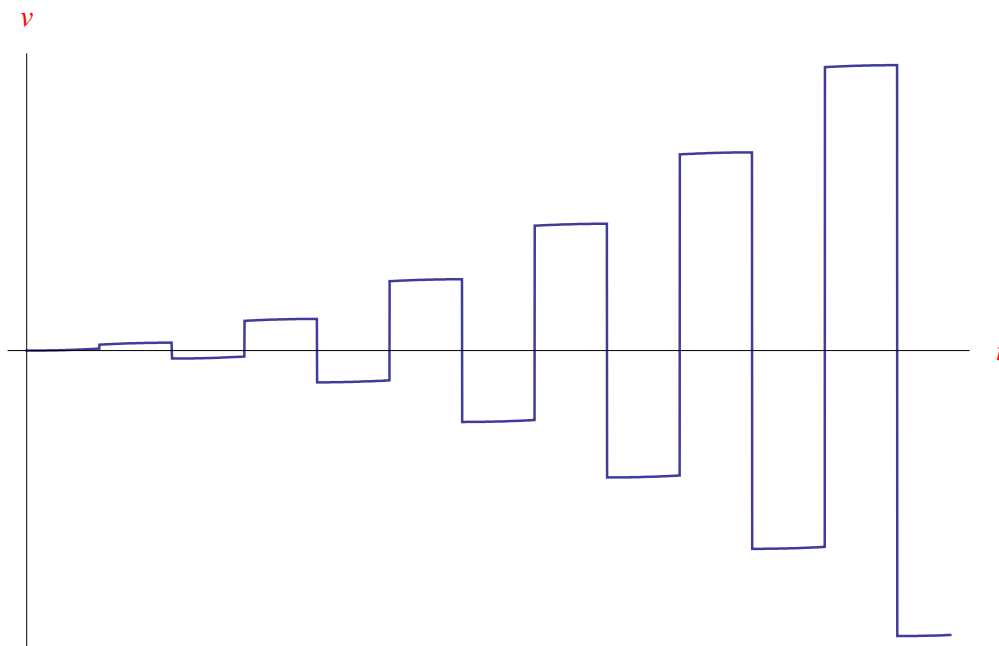


Figura 1.31: Andamento della velocità di un punto materiale sottoposto alla forza periodica $F(t) = \frac{F_M}{\pi} \arccos(\cos \Omega t)$.

essendo *sign* la **funzione signum**. In fig. 1.31 riportiamo l'andamento della velocità in funzione del tempo, da cui vediamo che il grafico è un insieme di archi di parabola.

Per ricavare l'ascissa $x(t)$:

$$x(t) = \frac{F_M}{\pi\Omega} \int_0^t \left[\Omega t \arccos(\cos \Omega t) - \frac{1}{2} \Omega^2 t^2 \operatorname{sign}(\sin \Omega t) \right] dt,$$

calcolo alquanto problematico. È allora preferibile affidarsi a **Mathematica**, risolvendo direttamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_M}{\pi} \arccos[\cos(\Omega t)] \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases},$$

ottenendo una soluzione molto complicata (almeno formalmente) che non riportiamo. Tracciamo poi il grafico in fig. 1.32, da vediamo che il grafico è un insieme di archi di parabola cubica.

1.7 Oscillatore anarmonico

Nel caso di un oscillatore armonico unidimensionale, la forza elastica è una funzione lineare dello spostamento x dalla posizione di riposo:

$$F(x) = -kx, \tag{1.129}$$

dove $k > 0$ è la costante elastica. Immaginiamo ora una forza che segue una legge di potenza:

$$F(x) = -kx^n, \quad (n \geq 2) \tag{1.130}$$

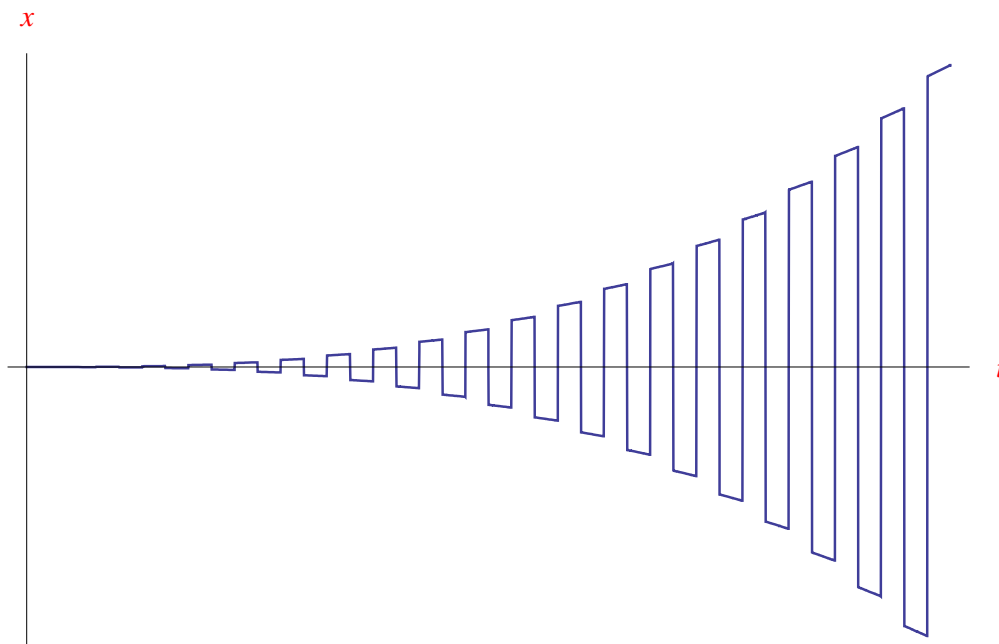


Figura 1.32: Andamento dell'ascissa di un punto materiale sottoposto alla forza periodica $F(t) = \frac{F_M}{\pi} \arccos(\cos \Omega t)$.

Naturalmente in questo caso la costante $k > 0$ ha dimensioni diverse dalla costante elastica in regime lineare. Il secondo principio della dinamica nel caso di oscillazioni libere fornisce si traduce nel seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda^2 x^n = 0 \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \cdot \left(\lambda^2 = \frac{k}{m} \right) \quad (1.131)$$

Abbiamo, dunque, un'equazione differenziale del second'ordine non lineare. La non linearità implica un'integrazione numerica. Ad esempio, per $n = 5$ troviamo la soluzione plottata in fig. 1.33.

Più interessante è il caso delle oscillazioni forzate. Ad esempio, applicando una forza

$$F(t) = A \sin \Omega t,$$

si ha

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda^2 x^5 = F_M \sin \Omega t \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \cdot \left(\lambda^2 = \frac{k}{m}, \quad F_M = \frac{A}{m} \right) \quad (1.132)$$

Formalmente la condizione di "risonanza" è data da

$$\lambda = \Omega,$$

per cui poniamo (nelle appropriate unità di misura):

$$\lambda = 20, \quad \Omega = 20 \quad (1.133)$$

Con tali valori otteniamo il grafico della soluzione riportato in fig. 1.34. Il diagramma delle orbite è riportato in fig. 1.35.

Infine in fig. 1.36 riportiamo il diagramma delle orbite per un oscillatore armonico:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 20x = \sin(20t) \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.134)$$

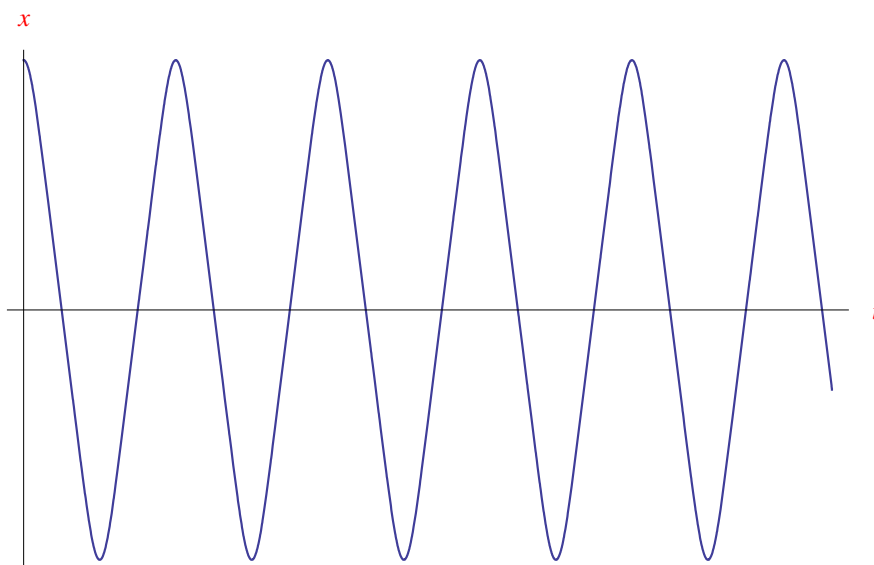


Figura 1.33: Evoluzione libera di un oscillatore anarmonico ($n = 5$).

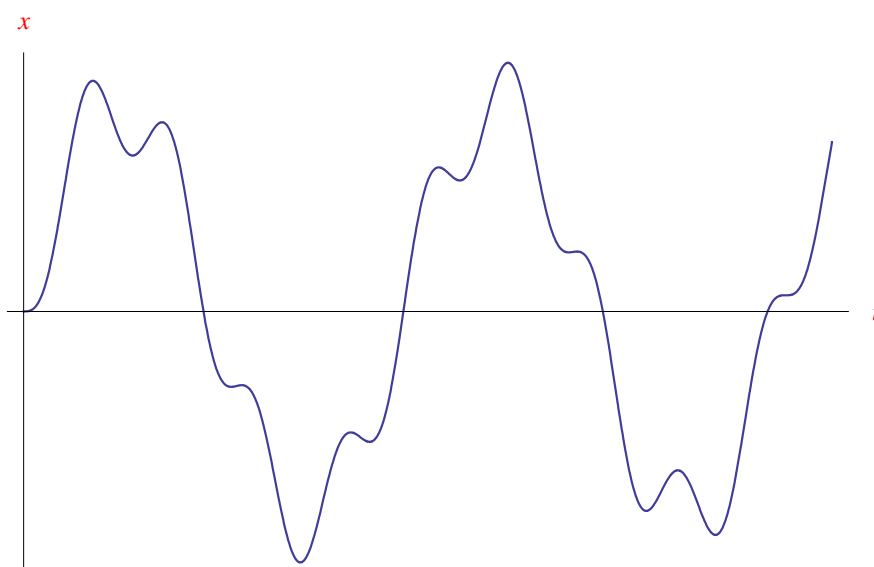


Figura 1.34: Evoluzione forzata di un oscillatore anarmonico ($n = 5$).

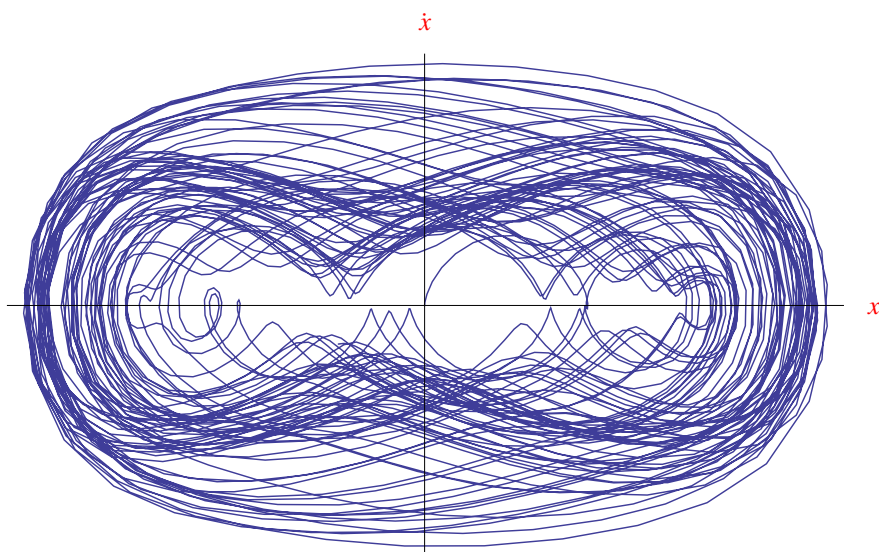


Figura 1.35: Diagramma delle orbite di un oscillatore anarmonico in condizioni di risonanza.

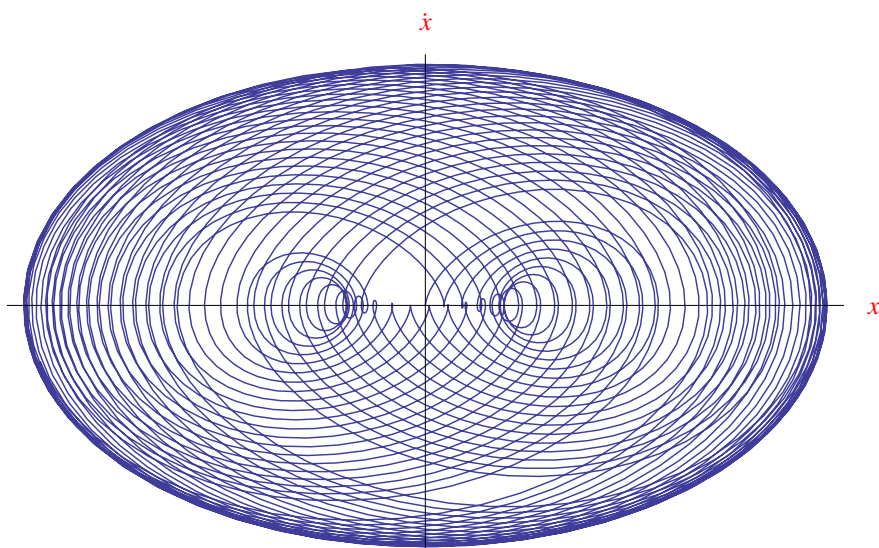


Figura 1.36: Diagramma delle orbite di un oscillatore armonico in condizioni di risonanza.

Capitolo 2

Oscillazioni smorzate

Abbiamo studiato le oscillazioni libere e forzate di un punto materiale soggetto a una forza elastica unidimensionale nel caso ideale di assenza di resistenze passive. Un modello più realistico deve inglobare resistenze passive in grado di riprodurre la viscosità del mezzo in cui l'oscillatore si muove, nonché gli attriti interni nel materiale elastico che determina la forza di richiamo. Il caso matematicamente più semplice è il regime lineare in cui la predetta resistenza passiva è una funzione lineare ed omogenea della velocità scalare, ed è orientata in verso opposto al vettore velocità. Orientando un asse x nella direzione del moto con origine nella posizione di riposo e verso positivo coincidente con quello di allungamento della molla, il secondo principio della dinamica si scrive:

$$m\ddot{x}\mathbf{i} = \mathbf{F}_R - kx\mathbf{i}, \quad (2.1)$$

dove \mathbf{F}_R è la resistenza passiva, come indicato nello schema di fig. 2.1. Per quanto precede:

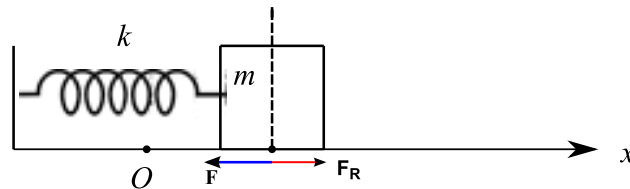


Figura 2.1: Forze agenti su uno oscillatore in presenza delle forze di attrito.

$$\mathbf{F}_R = -b\dot{x}\mathbf{i} \quad (2.2)$$

Qui $b > 0$ è una costante nota come *coefficiente di viscosità*. Da ciò segue l'equazione differenziale del moto:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.3)$$

avendo già definito in precedenza la pulsazione caratteristica $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La (2.3) è un'equazione differenziale ordinaria (in forma normale) del secondo ordine, lineare ed omogenea. Condizioni iniziali assegnate, danno luogo al seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Determiniamo innanzitutto l'integrale generale. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (2.5)$$

le cui radici sono

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1. **Caso aperiodico** $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \implies b > 2\sqrt{mk} \stackrel{def}{=} b_{crit}$

Si noti che si può scrivere in termini della pulsazione:

$$b_{crit} = 2m\omega_0 \quad (2.7)$$

2. **Caso critico** $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \implies b = b_{crit}$

3. **Caso oscillatorio smorzato** $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \implies b < b_{crit}$

2.1 Caso aperiodico ($b > b_{crit}$)

Abbiamo due radici reali e distinte:

$$\lambda_- = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \stackrel{def}{=} -\alpha < 0 \quad (2.8)$$

$$\lambda_+ = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \stackrel{def}{=} -\beta < 0,$$

Cioè:

$$\alpha = \frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} > 0, \quad \forall b > b_{crit} \quad (2.9)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} > 0, \quad \forall b > b_{crit},$$

aventi le dimensioni dell'inverso di un tempo. Un sistema fondamentale di integrali della (2.3) è $\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$, dove

$$\xi_1(t) = e^{-\alpha t}, \quad \xi_2(t) = e^{-\beta t}$$

Ciò implica che l'integrale generale della (2.3) si scrive:

$$x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\beta t}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Introduciamo una grandezza caratteristica – cioè dipendente solo da b e m e non da una eventuale forza esterna:

$$\tau = \frac{2m}{b} \quad (2.11)$$

Tenendo conto della

$$b_{crit} = 2m\omega_0, \quad (2.12)$$

si ha

$$\omega_0 \tau = \frac{b_{crit}}{b} \quad (2.13)$$

Quindi

$$b > b_{crit} \implies \omega_0 \tau < 1, \quad (2.14)$$

che si chiama *condizione di aperiodicità*. Dalle (2.9):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} \\ \beta &= \frac{1}{\tau} - \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Derivando la (2.10) rispetto al tempo otteniamo il modulo della velocità:

$$\dot{x}(t) = -\alpha c_1 e^{-\alpha t} - \beta c_2 e^{-\beta t} \quad (2.16)$$

Imponendo le condizioni iniziali si perviene al sistema lineare omogeneo nelle incognite c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = q_0 \\ -\alpha c_1 - \beta c_2 = \dot{x}_0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

da cui

$$c_1 = -\frac{\beta x_0 + \dot{x}_0}{\alpha - \beta}, \quad c_2 = \frac{\alpha x_0 + \dot{x}_0}{\alpha - \beta} \quad (2.18)$$

Prima di sostituire le (2.18) nella (2.10), definiamo altre due grandezze con le dimensioni di un tempo:

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} > 0, \quad \tau_2 = \frac{1}{\beta} > 0$$

Tenendo conto delle (2.15):

$$\tau_1 = \frac{\tau}{1 + \sqrt{1 - (\omega_0 \tau)^2}} \quad (2.19)$$

Alla stessa maniera:

$$\tau_2 = \frac{\tau}{1 - \sqrt{1 - (\omega_0 \tau)^2}} \quad (2.20)$$

La realtà di τ_1, τ_2 è garantita dalla condizione di aperiodicità (2.14). Sostituendo le (2.18) nella (2.10) otteniamo l'ascissa dell'oscillatore in funzione del tempo:

$$x(t) = -\frac{\beta x_0 + \dot{x}_0}{\alpha - \beta} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\alpha x_0 + \dot{x}_0}{\alpha - \beta} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (2.21)$$

Alla stessa maniera, partendo dalla (2.16) otteniamo il modulo della velocità:

$$\dot{x}(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (2.22)$$

dove abbiamo introdotto le costanti

$$K_1 = \frac{\alpha(\beta x_0 + \dot{x}_0)}{\alpha - \beta}, \quad K_2 = -\frac{\beta(\alpha x_0 + \dot{x}_0)}{\alpha - \beta} \quad (2.23)$$

Ne consegue che τ_1, τ_2 sono delle costanti di tempo dell'oscillatore. Per tracciare il grafico di $x(t)$ l'algoritmo è il seguente: supponiamo di conoscere il valore di ω_0 . Dalla condizione di criticità:

$$\tau < \tau_{max} = \frac{1}{\omega_0} \quad (2.24)$$

Ad esempio, per $\omega_0 = 20\text{rad/s}$, si ha

$$\tau_{\max} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s} \quad (2.25)$$

I valori di τ e ω_0 determinano univocamente i valori di α e β e quindi l'ascissa in funzione del tempo. In particolare, se la velocità iniziale è nulla, si ha:

$$x(t) = \frac{x_0}{\alpha - \beta} (-\beta e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\beta t}) \quad (2.26)$$

Il grafico di fig. 2.2 riporta l'andamento della funzione $x(t)$ per differenti valori della costante di tempo τ .

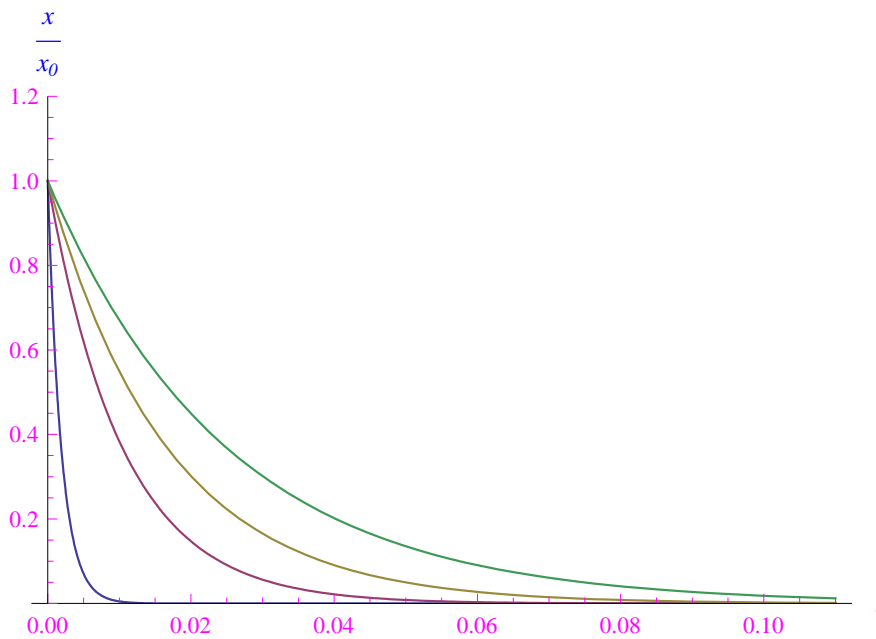


Figura 2.2: Andamento dell'ascissa (normalizzata sull'ascissa iniziale) di un oscillatore aperiodico, per diversi valori della costante di tempo $\tau = \frac{2m}{b} < \tau_{\max} = \omega_0^{-1}$. Precisamente: $\tau = 6 \times 10^{-3} \text{ s}, 10^{-2} \text{ s}, 2 \times 10^{-2} \text{ s}, 3 \times 10^{-2} \text{ s}, 4 \times 10^{-2} \text{ s}$.

Ne concludiamo che nel caso aperiodico l'ascissa dell'oscillatore armonico si annulla esponenzialmente, per cui il punto materiale non compie oscillazioni:

$$t \gg \tau \implies x(t) \simeq 0 \quad (2.27)$$

2.2 Caso critico ($b = b_{crit}$)

L'equazione caratteristica (2.5) ha una sola radice reale:

$$\lambda = -\frac{b}{2m} = -\alpha = -\frac{1}{\tau} < 0, \quad (2.28)$$

per cui un sistema di integrali fondamentali è

$$\{e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}\}$$

Pertanto l'integrale generale della (2.3) si scrive:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + c_2 t e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

Derivando la funzione (2.29) otteniamo la velocità

$$\dot{x}(t) = -\frac{c_1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + c_2 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.30)$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

si perviene al sistema:

$$\begin{cases} c_1 = q_0 \\ -\frac{c_1}{\tau} + c_2 = \dot{x}_0 \end{cases},$$

da cui

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \dot{x}_0 + \frac{x_0}{\tau}$$

Quindi l'integrale particolare che ci interessa è:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\dot{x}_0 + \frac{x_0}{\tau}\right) t e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.31)$$

e la velocità

$$\dot{x}(t) = -\frac{x_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\dot{x}_0 + \frac{x_0}{\tau}\right) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.32)$$

Assumendo $\dot{x}_0 = 0$ le equazioni (2.31)–(2.32) si scrivono:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \dot{x}(t) &= -\frac{x_0}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

A differenza del caso aperiodico dove intervenivano due costanti di tempo τ_1, τ_2 , la scala dei tempi del transitorio è fissata dall'unica costante di tempo $\tau = \frac{2m}{b}$:

$$x(t), \dot{x}(t) \xrightarrow[t \gg \tau]{} 0 \quad (2.34)$$

A rigore:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0 \quad (2.35)$$

Osserviamo che la costante di tempo è ora legata alla pulsazione caratteristica dall'evidente relazione:

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} \quad (2.36)$$

Ad esempio, per $\omega_0 = rad/s$ otteniamo per l'ascissa $x(t)$ l'andamento riportato in fig. 2.3, mentre in fig. 2.4 è plottato il diagramma delle orbite.

Ne concludiamo che anche nel caso criticamente smorzato, il punto materiale non compie oscillazioni e l'ascissa dopo un transitorio di durata τ , l'ascissa si annulla.

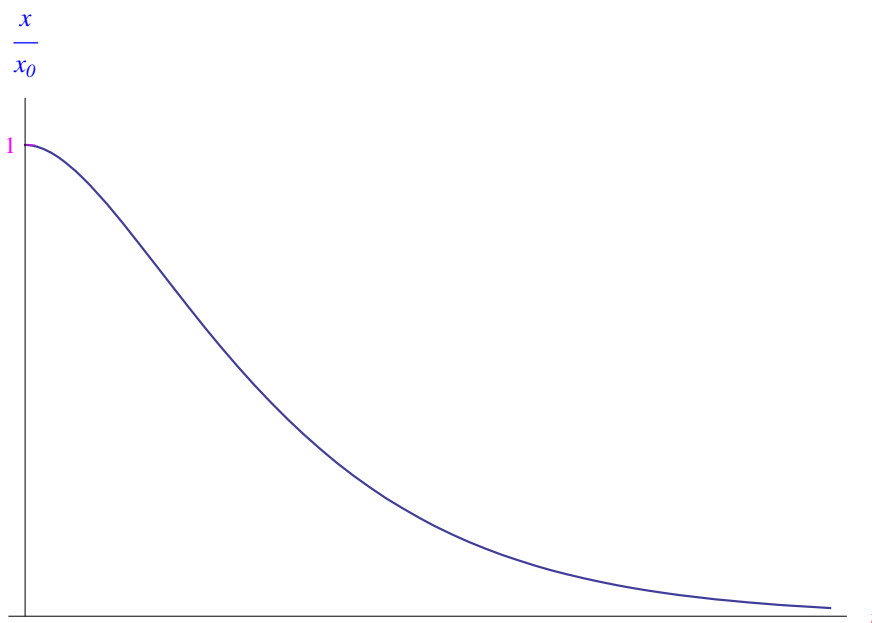


Figura 2.3: Ascissa di un oscillatore criticamente smorzato.

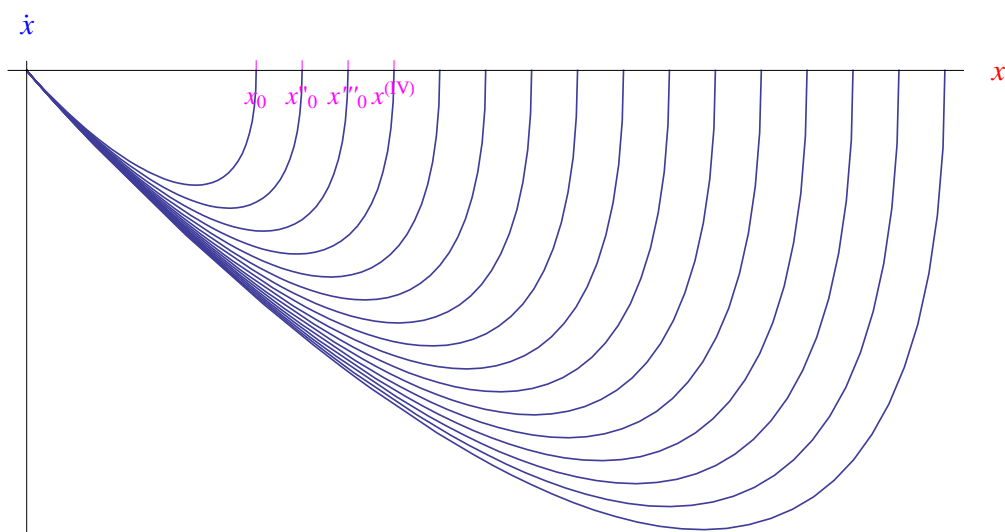


Figura 2.4: Evoluzione nello spazio delle configurazioni dello stato meccanico di un oscillatore criticamente smorzato.

2.3 Caso oscillatorio smorzato ($b < b_{crit}$)

Prima di affrontare il caso n. 3 (*oscillazioni smorzate*), sintetizziamo i risultati raggiunti, in modo da comprendere la fisica che c'è dietro questo problema matematico. Innanzitutto riscriviamo l'equazione differenziale del moto nella forma:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \frac{1}{\tau_0^2}x = 0 \quad (2.37)$$

Ricordiamo che $\tau = \frac{2m}{b}$ è la costante di tempo della resistenza passiva, quindi delle forze di attrito. Abbiamo poi introdotto una nuova grandezza avente le dimensioni di un tempo:

$$\tau_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{\omega_0} \quad (2.38)$$

legata al periodo T_0 delle oscillazioni armoniche in assenza di attrito, dalla relazione:

$$T_0 = 2\pi\tau_0 \quad (2.39)$$

In altri termini, la grandezza τ_0 fissa la scala dei tempi delle oscillazioni caratteristiche del sistema. Ne consegue che le condizioni di aperiodicità e di criticità si riscrivono:

$$\begin{aligned} \tau &< \tau_0 \\ \tau &= \tau_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

$\tau < \tau_0$ significa che le forze di attrito sono più "efficienti" della forza elastica, giacché hanno una scala dei tempi minore. Per $\tau = \tau_0$ si ha, invece, un equilibrio che da luogo al caso "critico" in cui il moto non è ancora oscillante. È facile allora immaginare che la condizione

$$\tau > \tau_0$$

determina un moto oscillatorio, comunque smorzato dalle forze di attrito. Abbiamo poi la condizione estrema:

$$\tau \gg \tau_0 \implies \ddot{x} + \frac{1}{\tau_0^2}x \simeq 0 \quad (2.41)$$

Cioè per grandi valori di τ (rispetto a τ_0), quindi per piccoli valori del coefficiente di viscosità b , le soluzioni dell'equazione differenziale del moto si comportano come quelle dell'equazione

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau_0^2}x = 0,$$

per cui si ha un'oscillazione armonica di pulsazione $\omega_0 = \tau_0^{-1}$. Nel limite opposto:

$$\tau \ll \tau_0 \implies \ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} \simeq 0 \quad (2.42)$$

Cioè per piccoli valori di τ (rispetto a τ_0), il moto è completamente dominato dalle forze di attrito.

Ciò premesso, consideriamo il caso

$$\tau > \tau_0 \quad (2.43)$$

Con tale condizione l'equazione caratteristica ammette due radici complesse coniugate:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \frac{1}{\tau^2}}, \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (2.44)$$

Osservazione 3 In questo lavoro utilizziamo il simbolo j per denotare l'unità immaginaria. Rammentiamo che tale convenzione è d'uso in Elettrotecnica ed in Elettronica per non creare confusione con il simbolo i che denota l'intensità di corrente.

Riscriviamo

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega, \quad (2.45)$$

essendo:

$$\omega \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \frac{1}{\tau^2}} \quad (2.46)$$

una grandezza con le dimensioni di una pulsazione. Risulta:

$$0 < \omega < \omega_0 \quad (2.47)$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \omega = \omega_0 \quad (2.48)$$

Cioè in assenza di attrito, ω è la pulsazione caratteristica. Un sistema fondamentale di integrali dell'equazione differenziale (2.37) è:

$$\{e^{-\lambda_+ t}, e^{-\lambda_- t}\} \equiv \left\{ e^{-(\frac{1}{\tau} + j\omega)t}, e^{-(\frac{1}{\tau} - j\omega)t} \right\} \quad (2.49)$$

Pertanto l'integrale generale della (2.37) si scrive:

$$x(t, K_1, K_2) = K_1 e^{-(\frac{1}{\tau} + j\omega)t} + K_2 e^{-(\frac{1}{\tau} - j\omega)t}, \quad (2.50)$$

dove K_1, K_2 sono costanti arbitrarie. Sviluppando gli esponenziali complessi utilizzando la nota formula di Eulero, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{-(\frac{1}{\tau} + j\omega)t} &= e^{-t/\tau} e^{-j\omega t} \\ &= e^{-t/\tau} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \\ e^{-(\frac{1}{\tau} - j\omega)t} &= e^{-t/\tau} (\cos \omega t + j \sin \omega t), \end{aligned} \quad (2.51)$$

cosicché:

$$x(t, K_1, K_2) = (K_1 + K_2) e^{-t/\tau} \cos \omega t + j(K_2 - K_1) e^{-t/\tau} \sin \omega t \quad (2.52)$$

Cioè

$$x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t/\tau} \cos \omega t + c_2 e^{-t/\tau} \sin \omega t, \quad (2.53)$$

avendo definito le nuove costanti di integrazione:

$$c_1 = K_1 + K_2, \quad c_2 = j(K_2 - K_1)$$

Derivando la funzione (2.50):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, c_1, c_2) &= -\alpha c_1 e^{-t/\tau} \cos \omega t - c_1 \omega e^{-t/\tau} \sin \omega t \\ &\quad - \alpha c_2 e^{-t/\tau} \sin \omega t + \omega c_2 e^{-t/\tau} \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.54)$$

Le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

implicano

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ -\frac{c_1}{\tau} + \omega c_2 = 0 \end{cases} \implies c_1 = x_0, c_2 = \frac{x_0}{\omega\tau},$$

che sostituite nelle (2.53)–(2.54):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t/\tau} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{x_0}{\tau} \frac{1 + (\omega\tau)^2}{\omega\tau} e^{-t/\tau} \sin \omega t \end{aligned} \tag{2.55}$$

Per studiare l'andamento della funzione $x(t)$ è conveniente scrivere la sua espressione nel seguente modo:

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi), \tag{2.56}$$

dove $A_0 > 0$ ha le dimensioni di una lunghezza, mentre φ è la fase iniziale. Deve essere:

$$A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega\tau} \sin \omega t \right)$$

Sviluppando il coseno che compare a primo membro con le formule di addizione degli archi, si ha:

$$A_0 \cos \omega t \cos \varphi - A_0 \sin \omega t \sin \varphi = x_0 \cos \omega t + \frac{x_0}{\omega\tau} \sin \omega t \iff \begin{cases} A_0 \cos \varphi = x_0 \\ -A_0 \sin \varphi = \frac{x_0}{\omega\tau} \end{cases}$$

Cioè:

$$A_0 = x_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\omega\tau \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}}} \tag{2.57}$$

Riesce:

$$|x(t)| = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \underbrace{|\cos(\omega t + \varphi)|}_{\leq 1} \leq A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cioè

$$-A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \leq x(t) \leq A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \forall t \in [0, +\infty) \tag{2.58}$$

Dal momento che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (-A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0,$$

si ha per il **teorema dei carabinieri**:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Inoltre dalla doppia disuguaglianza (2.58) segue che il grafico di $x(t)$ è involupato dalle curve esponenziali $\pm A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. La funzione $x(t)$ presenta un numero infinito numerabile di massimi relativi nei punti t_k tali che

$$\cos(\omega t_k + \varphi) = 1,$$

da cui

$$t_k = \frac{2k\pi - \varphi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Quindi

$$\bar{x}_k = x(t_k) = A_0 e^{-\frac{t_k}{\tau}} \quad (2.59)$$

Per un assegnato k , il massimo relativo successivo è

$$\bar{x}_{k+1} = x(t_{k+1}) = A_0 e^{-\frac{t_{k+1}}{\tau}}, \quad (2.60)$$

essendo

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \frac{2(k+1)\pi - \varphi}{\omega} \\ &= t_k + \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Abbiamo

$$\frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_{k+1}} = e^{\frac{1}{\tau}(t_{k+1}-t_k)} \quad (2.62)$$

Tenendo conto della (2.61):

$$\frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_{k+1}} = e^{\frac{2\pi}{\omega\tau}} \quad (2.63)$$

Passando ai logaritmi:

$$\ln \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_{k+1}} = \frac{2\pi}{\omega\tau} \quad (2.64)$$

Poniamo

$$T \stackrel{def}{=} \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.65)$$

che non è il periodo di $x(t)$ in quanto non periodica, bensì il tempo necessario affinché l'ascissa dell'oscillatore passi dal valore $x(t_k)$ al valore $x(t_{k+1}) < x(t_k)$. Quindi:

$$\ln \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_{k+1}} = \frac{T}{\tau}, \quad \forall k \quad (2.66)$$

ed è pertanto una costante caratteristica dell'oscillatore, che si chiama *decremento logaritmico*. In fig. 2.5 riportiamo un tipico andamento:

2.4 Implementazione in Mathematica

Ora che abbiamo compreso appieno la fisica del problema delle oscillazioni smorzate, ed aver risolto analiticamente l'equazione differenziale del moto per assegnate condizioni iniziali, possiamo affidarci a un software di calcolo simbolico/numerico come ad esempio, *Mathematica*. A tale scopo, riscriviamo l'equazione che ci interessa:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \frac{1}{\tau_0^2}x = 0 \quad (2.67)$$

con le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.68)$$

L'equazione differenziale è controllata dai parametri:

$$\tau = \frac{2m}{b}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (2.69)$$

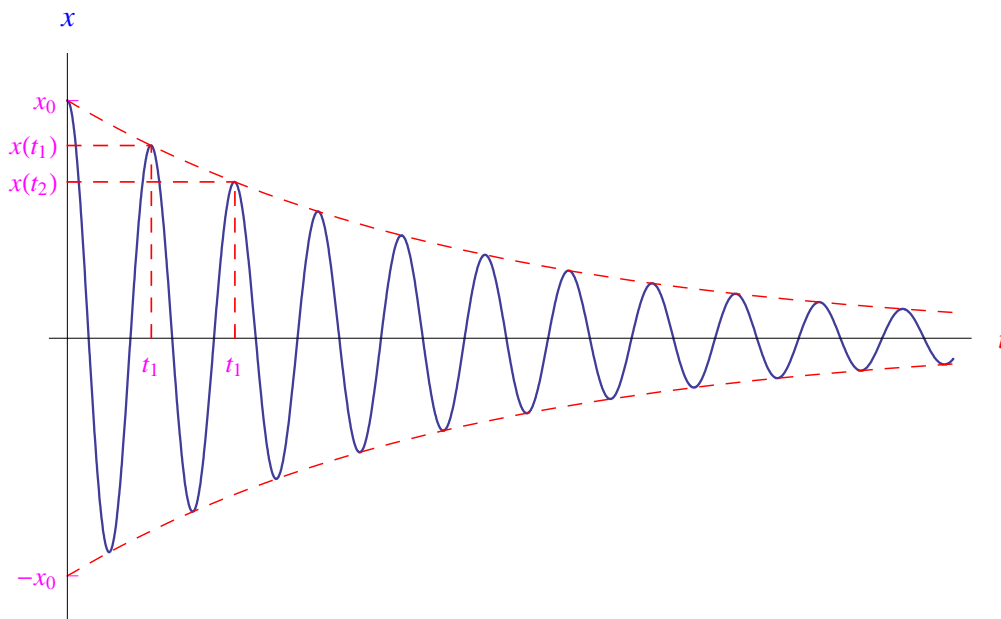


Figura 2.5: Oscillazioni smorzate. L'ampiezza decresce con legge esponenziale, conservando il decremento logaritmico.

che svolgono il ruolo di costanti di tempo. È facile controllare che la situazione limite $\tau, \tau_0 \rightarrow +\infty$ corrisponde alla particella libera (la molla si spezza e non c'è attrito). Dal momento che dobbiamo ricostruire in software l'evoluzione dinamica dell'oscillatore, è preferibile fissare una volta per tutte il valore di τ , lasciando come parametro la costante di tempo τ_0 . Fisicamente, ciò equivale ad assegnare la forza di attrito e variare la costante elastica della molla. In tal caso è possibile ricostruire i tre casi:

$\tau < \tau_0$	aperiodico
$\tau = \tau_0$	critico
$\tau > \tau_0$	oscillatorio smorzato

I predetti comportamenti sono riassunti in fig. 2.6.

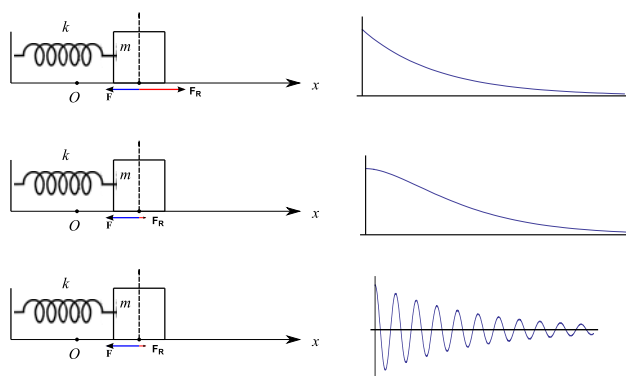


Figura 2.6: Nell'oscillatore in alto, le forze di attrito sono dominanti, per cui la particella non compie oscillazioni. Al centro una situazione simile, ma critica. L'oscillatore in basso compie oscillazioni esponenzialmente smorzate.

2.5 Oscillazioni forzate. Risonanza

Nel paragrafo 1.2 abbiamo studiato le oscillazioni forzate in condizioni di idealità, ovvero trascurando le forze di attrito. Nel caso di una sollecitazione esterna funzione sinusoidale del tempo, abbiamo stabilito che se la sua frequenza Ω è di poco inferiore alla frequenza caratteristica ω_0 dell'oscillatore, si verifica il fenomeno dei battimenti (che è una conseguenza delle formule di prostaferesi). In particolare, se $\Omega = \omega_0$ si un battimento di frequenza nulla, ovvero il fenomeno della risonanza.

Consideriamo ora uno scenario più realistico: una forza esterna che sia funzione sinusoidale del tempo, applicata a un oscillatore armonico in presenza di forze viscosse. Precisamente:

$$F(t) = \mathcal{F}_M \cos(\Omega t + \gamma) \quad (2.70)$$

Il secondo principio della dinamica restituisce:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + \mathcal{F}_M \cos(\Omega t + \gamma) \quad (2.71)$$

Dividendo primo e secondo membro per la massa m :

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \frac{1}{\tau_0^2}x = F_M \cos(\Omega t + \gamma), \quad (2.72)$$

dove

$$F_M = \frac{\mathcal{F}_M}{m}, \quad (2.73)$$

mentre τ e τ_0 sono le costanti di tempo introdotte nel paragrafo precedente, cioè

$$\tau = \frac{2m}{b}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \quad (2.74)$$

La (2.72) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare non omogenea. Dalla teoria delle equazioni differenziali sappiamo che il suo integrale generale è:

$$x(t, c_1, c_2) = \xi(t, c_1, c_2) + x_1(t) \quad (2.75)$$

Qui c_1 e c_2 sono le usuali costanti di integrazione, mentre le funzioni $\xi(t, c_1, c_2)$ e $x_1(t)$ sono rispettivamente l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e un integrale particolare dell'equazione completa. Abbiamo già studiato l'equazione omogenea che descrive le oscillazioni libere nei tre casi:

$$\begin{aligned} b &> b_{crit} = 2m\omega_0 && \text{(caso aperiodico)} \\ b &= b_{crit} && \text{(caso critico)} \\ b &< b_{crit} && \text{(caso oscillatorio smorzato),} \end{aligned}$$

che in termini di costanti di tempo si scrivono rispettivamente:

$$\tau < \tau_0, \quad \tau = \tau_0, \quad \tau > \tau_0$$

Nelle oscillazioni forzate il caso più interessante è quello oscillatorio smorzato. Ci proponiamo, dunque, di determinare l'equazione oraria di un oscillatore smorzato quando è presente

una sollecitazione esterna funzione sinusoidale del tempo. In questo caso, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$\xi(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t/\tau} \cos \omega t + c_2 e^{-t/\tau} \sin \omega t, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.76)$$

Ricordiamo che

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - \frac{1}{\tau^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \quad (2.77)$$

Per determinare l'integrale particolare $x_1(t)$ utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati, scrivendo $x_1(t)$ in notazione complessa:

$$x_1(t) = A e^{j\Omega t} \quad (A \in \mathbb{C}) \quad (2.78)$$

Dobbiamo imporre che (2.78) sia una soluzione della (2.72); innanzitutto scriviamo la forza esterna (per unità di massa) in notazione complessa:

$$f(t) = F_M e^{j(\Omega t + \gamma)}, \quad (2.79)$$

dopodichè calcolando le derivate prima e seconda di (2.78) e immettendole a primo membro della (1.84) otteniamo:

$$-A\Omega^2 e^{j\Omega t} + \frac{2}{\tau} j A \Omega e^{j\Omega t} + \omega_0^2 A e^{j\Omega t} = F_M e^{j\Omega t} e^{j\gamma},$$

da cui:

$$A = F_M \frac{e^{j\gamma}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2}{\tau} j \Omega}, \quad (2.80)$$

che sostituita nella (2.78):

$$x_1(t) = \frac{\overbrace{F_M e^{j\Omega t} e^{j\gamma}}^{=f(t)}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2}{\tau} j \Omega},$$

onde:

$$x_1(t) = \frac{f(t)}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2}{\tau} j \Omega} \quad (2.81)$$

Tuttavia a noi interessa la parte reale della funzione $x_1(t)$, quindi sviluppiamo l'ampiezza complessa (2.80):

$$\begin{aligned} A &= F_M \frac{e^{j\gamma}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2}{\tau} j \Omega} \\ &= F_M \frac{e^{j\gamma} (\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{2}{\tau} j \Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2} \Omega^2} \\ &= F_M \frac{\frac{2}{\tau} \Omega \sin \gamma + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \gamma + j [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \gamma - \frac{2}{\tau} \Omega \cos \gamma]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2} \Omega^2} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Scrivendo A nella forma $A = |A| e^{j\phi}$, si ha che il modulo $|A|$ si calcola immediatamente dalla seconda delle (2.82):

$$\begin{aligned}
 |A| &= F_M \overbrace{|e^{j\gamma}|}^{=1} \frac{|\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{2}{\tau}j\Omega|}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2} \\
 &= F_M \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2} \\
 &= F_M \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2}},
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

mentre la fase:

$$\begin{aligned}
 \tan \phi &= \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \gamma - \frac{2}{\tau}\Omega \cos \gamma}{\frac{2}{\tau}\Omega \sin \gamma + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \gamma} \\
 &= \frac{\tan \gamma + \frac{2}{\tau} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}}{1 - \frac{2}{\tau} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \tan \gamma}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Se poniamo

$$\psi \stackrel{def}{=} \arctan \left(\frac{2}{\tau} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right), \tag{2.85}$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \tan \phi &= \frac{\tan \gamma + \tan \psi}{1 - \tan \gamma \tan \psi} \\
 &= \tan (\gamma + \psi),
 \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la nota formula di addizione degli archi:

$$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Quindi:

$$\phi = \gamma + \arctan \left(\frac{2}{\tau} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right) \tag{2.86}$$

A questo punto non dobbiamo fare altro che prendere la parte reale della funzione $x_1(t)$ dopo aver immesso tutte le grandezze trovate:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \operatorname{Re} (Ae^{j\Omega t}) \\
 &= \operatorname{Re} (|A| e^{j\phi} e^{j\Omega t}) \\
 &= |A| \operatorname{Re} e^{j(\Omega t + \phi)} \\
 &= |A| \cos (\Omega t + \phi),
 \end{aligned}$$

ovvero

$$x_1(t) = x_M \cos (\Omega t + \phi), \tag{2.87}$$

dove x_M è l'ampiezza:

$$x_M \stackrel{def}{=} \frac{F_M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2}}, \quad (2.88)$$

mentre la fase ϕ è stata già calcolata. Finalmente possiamo scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale completa:

$$x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t/\tau} \cos \omega t + c_2 e^{-t/\tau} \sin \omega t + x_M \cos(\Omega t + \phi), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.89)$$

Derivando otteniamo la velocità:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, c_1, c_2) = & -\frac{c_1}{\tau} e^{-t/\tau} \cos \omega t - c_1 \omega e^{-t/\tau} \sin \omega t - \frac{c_2}{\tau} e^{-t/\tau} \sin \omega t \\ & + \omega c_2 e^{-t/\tau} \cos \omega t - \Omega x_M \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.91)$$

si perviene al sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + 0 = x_0 - x_M \cos \phi \\ -\frac{1}{\tau} c_1 + \omega c_2 = \Omega x_M \sin \phi \end{cases}, \quad (2.92)$$

la cui unica soluzione è

$$c_1 = x_0 - x_M \cos \phi, \quad c_2 = \frac{\Omega}{\omega} x_M \sin \phi + \frac{1}{\omega \tau} (x_0 - x_M \cos \phi)$$

Quindi

$$\begin{aligned} x(t) = & (x_0 - x_M \cos \phi) e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t + \left[\frac{\Omega}{\omega} x_M \sin \phi + \frac{1}{\omega \tau} (x_0 - x_M \cos \phi) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega t \\ & + x_M \cos(\Omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.93)$$

da cui vediamo che $x(t)$ è la somma di due contributi:

$$x(t) = x_{tr}(t) + x_1(t), \quad (2.94)$$

dove $x_{tr}(t)$ è il termine transitorio o *transiente*, mentre $x_1(t)$ è il termine permanente o *a regime*, ovvero l'integrale particolare (2.87). Precisamente:

$$x_{tr}(t) = (x_0 - x_M \cos \phi) e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t + \left[\frac{\Omega}{\omega} x_M \sin \phi + \frac{1}{\omega \tau} (x_0 - x_M \cos \phi) \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega t, \quad (2.95)$$

da cui vediamo che non è periodico ma esponenzialmente smorzato e per $t \gg \tau$ diviene trascurabile, onde il termine dominante è $x_1(t)$:

$$x(t \gg \tau) \simeq x_M \cos(\Omega t + \phi)$$

Cioè a regime l'oscillatore oscilla con la stessa frequenza della sollecitazione esterna. Osserviamo che tale circostanza si verifica non solo per $b < b_{crit}$, ma anche per $b \geq b_{crit}$ cioè per

il caso aperiodico e critico, in cui il termine transiente non è oscillante ma monotonamente decrescente.

A regime l'ampiezza delle oscillazioni in funzione della frequenza Ω è

$$x_M(\Omega) = \frac{F_M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2}} \quad (2.96)$$

Eseguiamo uno **studio di funzione** di tale grandezza.

Insieme di definizione

$$X = [0, +\infty) \quad (2.97)$$

Segno della funzione

È manifestamente

$$x_M(\Omega) > 0, \quad \forall \Omega \in X, \quad (2.98)$$

per cui il grafico Γ_{x_M} è contenuto nel primo quadrante del piano cartesiano ($O\Omega x_M$).

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$x_M(\Omega) = 0 \iff \frac{F_M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2}} \quad \text{mai!} \quad (2.99)$$

onde non esistono zeri al finito.

Intersezione con l'asse delle ordinate

$$x_M(0) = \frac{F_M}{\omega_0^2} \implies P_0 \left(0, \frac{F_M}{\omega_0^2} \right) \in \Gamma_{x_M} \quad (2.100)$$

Comportamento agli estremi dell'insieme di definizione

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} x_M(\Omega) = 0^+ \quad (2.101)$$

Cioè la funzione è **infinitesima** all'infinito o ciò che è lo stesso, l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.

Studio della derivata prima

$$x'_M(\Omega) = -2F_M\Omega \frac{\Omega^2 - \left(\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4}{\tau^2}\Omega^2\right]^3}} \quad (2.102)$$

Abbiamo

$$x'_M(\Omega) = 0 \iff \Omega \left[\Omega^2 - \left(\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) \right] = 0$$

Una delle radici è $\Omega = 0$, per cui il grafico di $x_M(\Omega)$ “parte” con tangente orizzontale.

$$\Omega^2 - \left(\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) = 0, \quad (2.103)$$

che ammette radici reali se

$$\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2} > 0 \iff \frac{1}{\omega_0 = \tau_0^{-1}} > \frac{2}{\tau^2} \iff \tau_0 < \frac{\tau}{\sqrt{2}} \quad (2.104)$$

Ricordiamo che la condizione

$$\tau_0 < \tau$$

esprime il caso oscillatorio smorzato, per cui abbiamo trovato una condizione più stringente:

$$\tau_0 < \frac{\tau}{\sqrt{2}}, \quad (2.105)$$

che in termini di coefficiente di viscosità b si scrive

$$\sqrt{\frac{m}{k}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2m}{b} \iff b < b'_{crit}, \quad (2.106)$$

avendo definito un nuovo valore critico di b :

$$b'_{crit} = \sqrt{2mk} = \sqrt{2}m\omega_0 \quad (2.107)$$

Rammentiamo il valore critico di b che discrimina i comportamenti aperiodico, critico e oscillatorio smorzato:

$$b_{crit} = 2m\omega_0 \quad (2.108)$$

Segue

$$b'_{crit} < b_{crit} \quad (2.109)$$

In tale ipotesi la (2.103) ammette due radici reali e distinte Ω_0 e $-\Omega_0$, essendo

$$\Omega_0 \stackrel{def}{=} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2}}, \quad (2.110)$$

per cui $-\Omega_0 < 0$ è da scartare. Dalla (2.102):

$$x'_M(\Omega) > 0 \iff \Omega^2 - \Omega_0^2 < 0 \iff_{\Omega \geq 0} 0 \leq \Omega < \Omega_0$$

Cioè la funzione $x_M(\Omega)$ è strettamente crescente per $\Omega \in (0, \Omega_0)$, ed è strettamente decrescente per $\Omega \in (\Omega_0, +\infty)$, onde Ω_0 è punto di massimo relativo, ed è facile persuadersi che si tratta di un massimo assoluto. Per quanto detto, se $b < b'_{crit}$ l'ampiezza x_M assume un massimo assoluto per $\Omega = \Omega_0$ data dalla (2.110). Per

$$b'_{crit} < b < b_{crit}, \quad (2.111)$$

l'ampiezza x_M non ha massimi/minimi per $\Omega > 0$ e decresce monotonamente in funzione di Ω , mentre il termine transiente è ancora oscillante. Infine, per $b > b_{crit}$ il termine transiente non è oscillante e l'ampiezza x_M dell'oscillazione a regime è ancora monotonamente decrescente (in funzione della frequenza della forza esterna). Per una questione di comodità matematica è conveniente esprimere le varie condizioni in termini delle costanti di tempo. Ad esempio:

$$b < b_{crit} \iff \tau > \tau_0 \stackrel{def}{=} \tau_{crit} \quad (2.112)$$

$$b < b'_{crit} \iff \tau > \sqrt{2}\tau_0 \stackrel{def}{=} \tau'_{crit}$$

Supponiamo di avere un oscillatore i cui valori m e k siano tali che

$$\tau_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s} \implies \tau'_{crit} \simeq 2.83 \cdot 10^{-2} \text{ s} \quad (2.113)$$

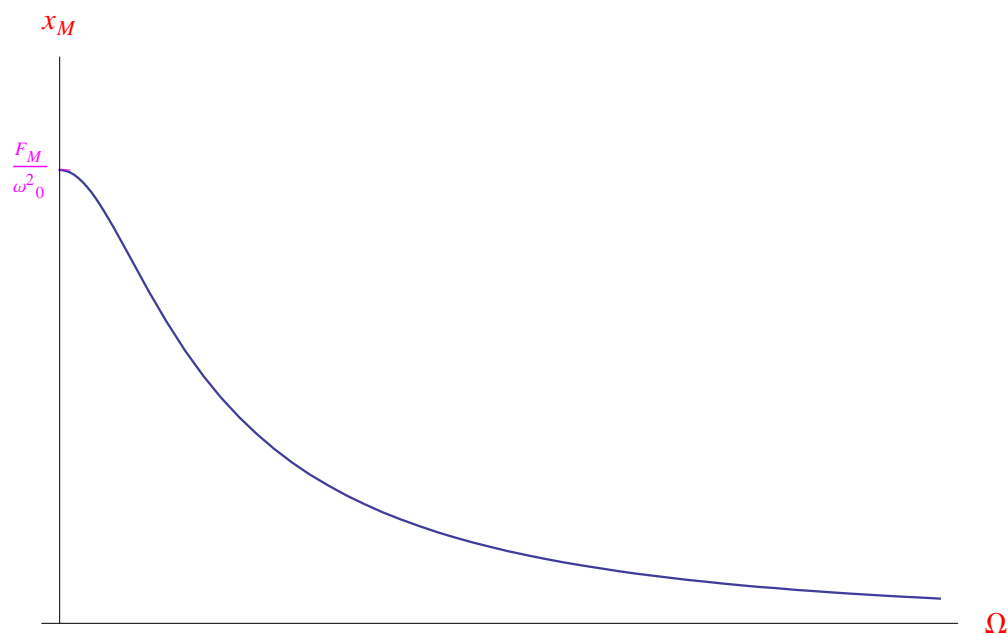


Figura 2.7: Andamento dell'ampiezza x_M in funzione della frequenza Ω della forza esterna, per $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ s, $\tau = 1.5 \cdot 10^{-2}$ s.

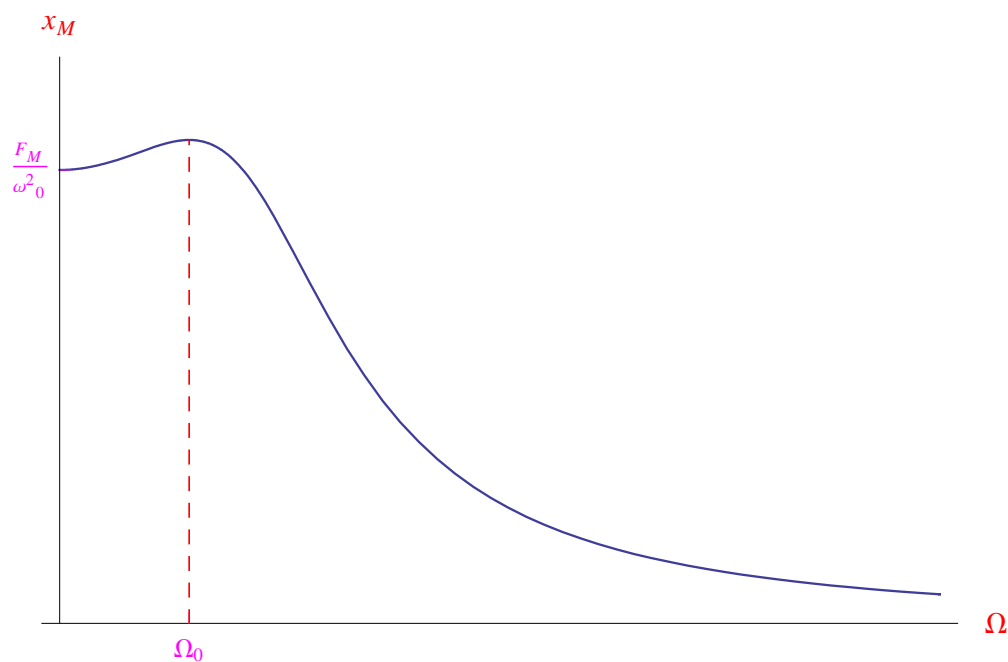


Figura 2.8: Andamento dell'ampiezza x_M in funzione della frequenza Ω della forza esterna, per $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ s, $\tau = 3.5 \cdot 10^{-2}$ s.

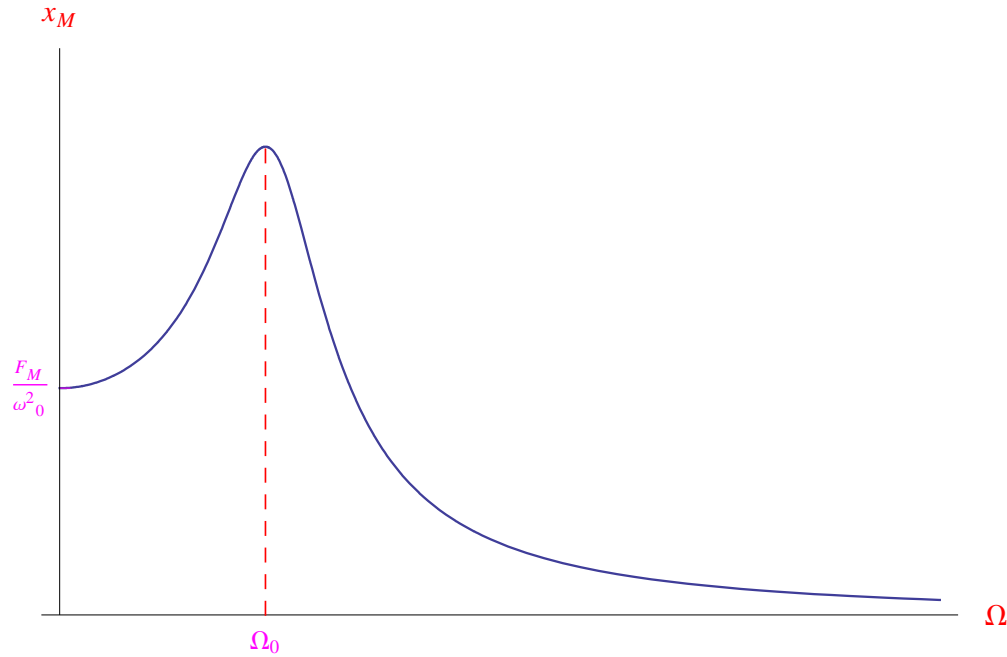


Figura 2.9: Andamento dell'ampiezza x_M in funzione della frequenza Ω della forza esterna, per $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ s, $\tau = 8 \cdot 10^{-2}$ s.

In un esperimento computazionale siamo liberi di variare il parametro reale positivo τ che è la costante di tempo delle forze di attrito. Per $\tau = 1.5 \cdot 10^{-2}$ s $<$ τ_0 si ottiene l'andamento di fig. 2.7, da cui vediamo che non ci sono massimi relativi per $\Omega > 0$.

Assumendo $\tau = 3.5 \cdot 10^{-2}$ s $>$ τ_0 otteniamo il risultato di fig. 2.8, da cui vediamo che un massimo relativo per $\Omega = \Omega_0$.

Un ulteriore aumento di τ restituisce il grafico della fig. 2.9, da cui vediamo un andamento più piccato intorno a $\Omega = \Omega_0$.

Al crescere indefinito di τ , l'andamento di x_M diviene progressivamente più piccato intorno a Ω_0 , come vediamo dalla fig. 2.10.

Dai predetti grafici si deduce che anche in presenza di attrito si verifica il fenomeno della risonanza, la cui condizione è

$$\Omega = \Omega_0 \tag{2.114}$$

In tale condizione l'ampiezza massima vale:

$$x_{M,\max} = \frac{\tau F_M}{2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}} \tag{2.115}$$

Per riprodurre il caso ideale di assenza di attrito, dobbiamo eseguire l'operazione di passaggio al limite per $\tau \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} x_{M,\max} = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Omega_0 = \omega_0 \tag{2.116}$$

Mostriamo ora che per $b \ll b_{crit}$ la frequenza Ω_0 è approssimativamente uguale alla frequenza ω_0 . Innanzitutto ricordiamo che

$$b \ll b_{crit} \iff \tau \gg \tau_{crit}$$

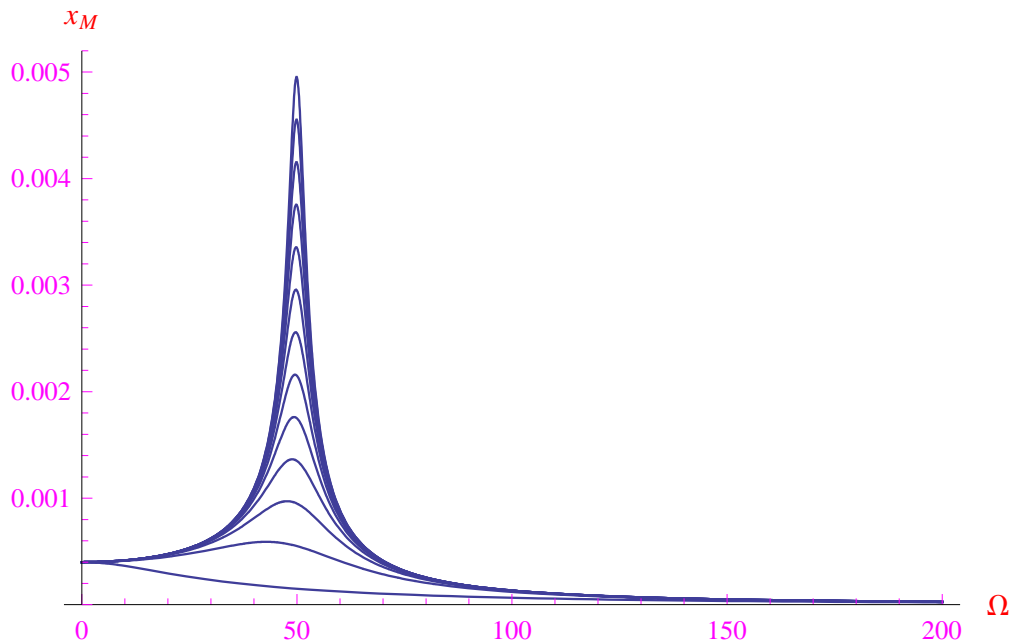


Figura 2.10: Andamento dell'ampiezza x_M per valori di τ progressivamente crescenti.

Quindi scriviamo

$$\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - 2x^2},$$

avendo definito la variabile adimensionale:

$$x = \frac{1}{\omega_0 \tau} = \frac{\tau_{crit}}{\tau} \implies (\tau \gg \tau_{crit} \implies x \ll 1)$$

Segue

$$\sqrt{1 - 2x^2} \simeq 1 - x^2 + O(x^3)$$

Cioè

$$\Omega_0 = \omega_0 \left[1 - \left(\frac{1}{\omega_0 \tau} \right)^2 + O \left(\frac{1}{\omega_0 \tau} \right)^3 \right] \implies \Omega_0 \sim \omega_0$$

Consideriamo ora di avere un oscillatore di frequenza propria

$$\omega_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \implies \tau_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \tag{2.117}$$

Al solito, studiamo il comportamento per valori differenti della costante di tempo τ delle forze di attrito, nonché della frequenza della sollecitazione esterna. Precisamente, per

$$\tau = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \Omega = 10 \text{ rad/s},$$

abbiamo che il sistema è ben lontano dalla risonanza, e il corrispondente oscillatore libero esibisce un comportamento oscillatorio smorzato, giacché $\tau > \tau_0$. Con questi dati otteniamo il grafico di fig. 2.11: il transiente perde rapidamente di efficacia, e il sistema oscilla alla frequenza della sollecitazione esterna.

Aumentiamo la costante di tempo delle forze di attrito:

$$\tau = 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \Omega = 10 \text{ rad/s},$$

Il risultato è graficato in fig. 2.12, da cui appuriamo che il transiente è più efficace del caso precedente.

In corrispondenza di un ulteriore incremento otteniamo il grafico di fig. 2.13.

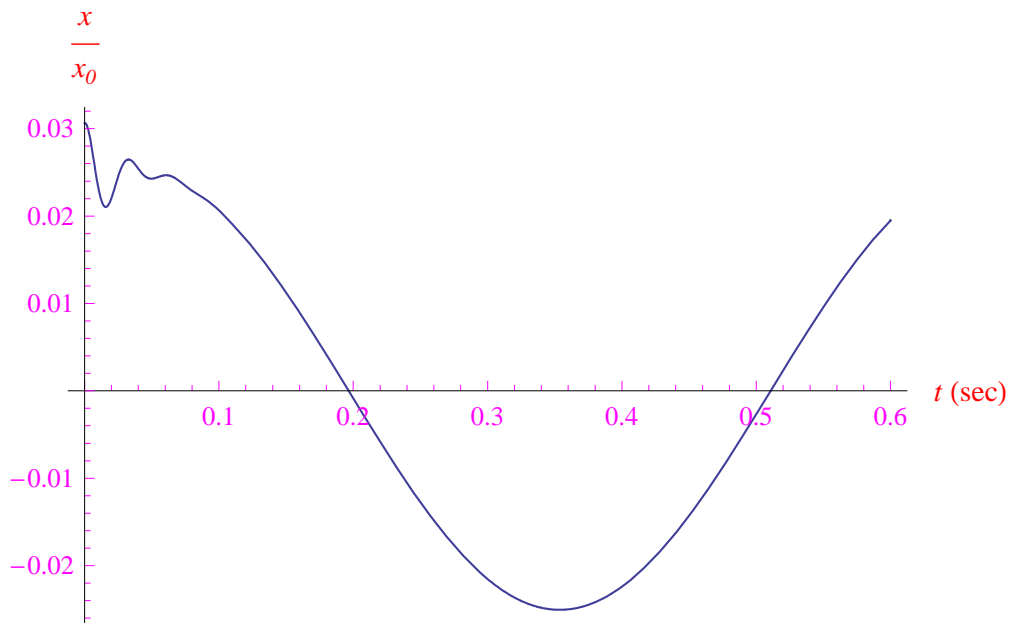


Figura 2.11: Ascissa di un oscillatore con $\omega_0 = 2 \cdot 10^2 \text{rad/s}$ sottoposto a una sollecitazione di frequenza $\Omega = 10 \text{rad/s}$, mentre le forze di attrito hanno una costante di tempo $\tau = 2 \cdot 10^{-2} \text{s}$.

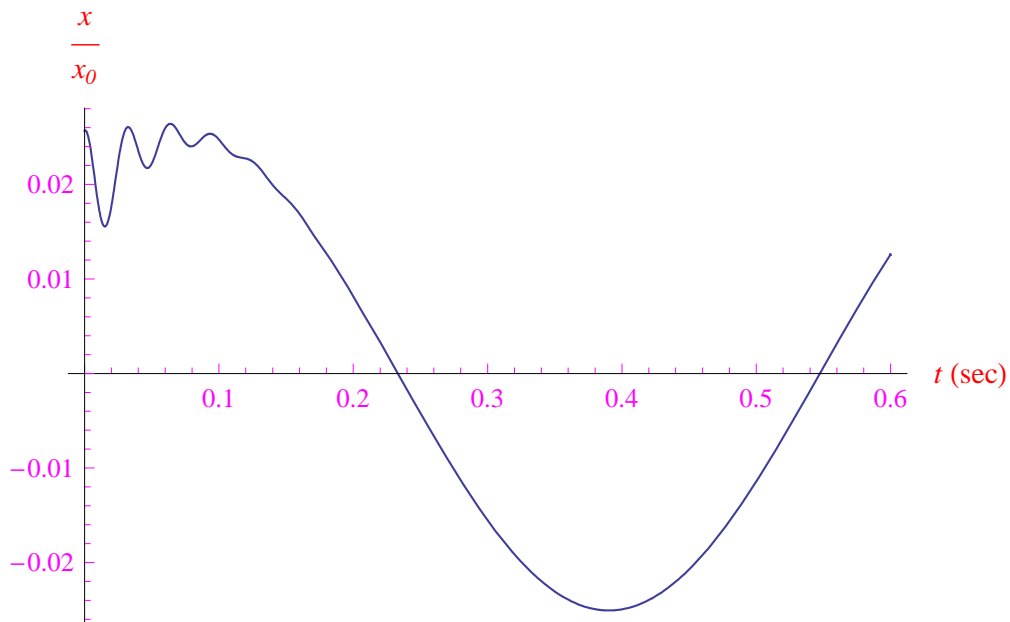


Figura 2.12: Ascissa di un oscillatore con $\omega_0 = 2 \cdot 10^2 \text{rad/s}$ sottoposto a una sollecitazione di frequenza $\Omega = 10 \text{rad/s}$, mentre le forze di attrito hanno una costante di tempo $\tau = 4 \cdot 10^{-2} \text{s}$.

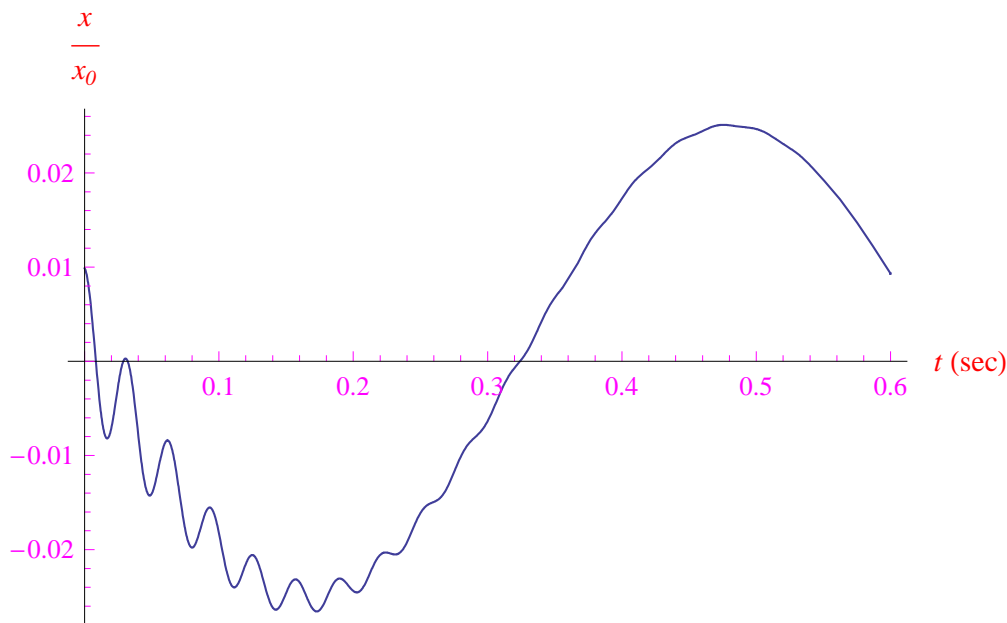


Figura 2.13: Ascissa di un oscillatore con $\omega_0 = 2 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$ sottoposto a una sollecitazione di frequenza $\Omega = 10 \text{ rad/s}$, mentre le forze di attrito hanno una costante di tempo $\tau = 11 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Esercizio 4 Studiare l'evoluzione dinamica nel dominio del tempo e nel dominio delle configurazioni di un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione propria $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$, sottoposto a una forza esterna variabile sinusoidalmente la cui legge riferita all'unità di massa, è:

$$f(t) = F_M \cos(\Omega t + \gamma), \quad \Omega = 198 \text{ rad/s},$$

mentre la costante di tempo delle forze viscosse è

$$\tau = 10^{-4} \text{ s} \tag{2.118}$$

Soluzione

Dal momento che è $\tau < \tau_0$, si ha che in assenza di forze esterne, l'oscillatore è aperiodico. Per determinare l'eventuale presenza di un massimo dell'ampiezza (visto che la frequenza della forza è quasi uguale alla frequenza propria), dobbiamo calcolare

$$\tau'_{crit} = \sqrt{2}\tau_0 \simeq 7 \cdot 10^{-3} \text{ s} > \tau,$$

per cui l'ampiezza non presenta massimi per $\Omega > 0$, come vediamo dal grafico di fig. 2.14. Fisicamente significa che l'intensità delle forze di attrito è tale da non massimizzare l'ampiezza nonostante la condizione:

$$\Omega \sim \omega_0$$

È comunque istruttivo costruire il diagramma delle orbite per questo sistema (cfr. fig.)

2.6 Oscillatore di Riemann

I risultati stabiliti nei numeri precedenti sulle oscillazioni forzate in presenza di attrito, si prestano a una interessante applicazione riguardo alla parte reale della **funzione zeta di Riemann**

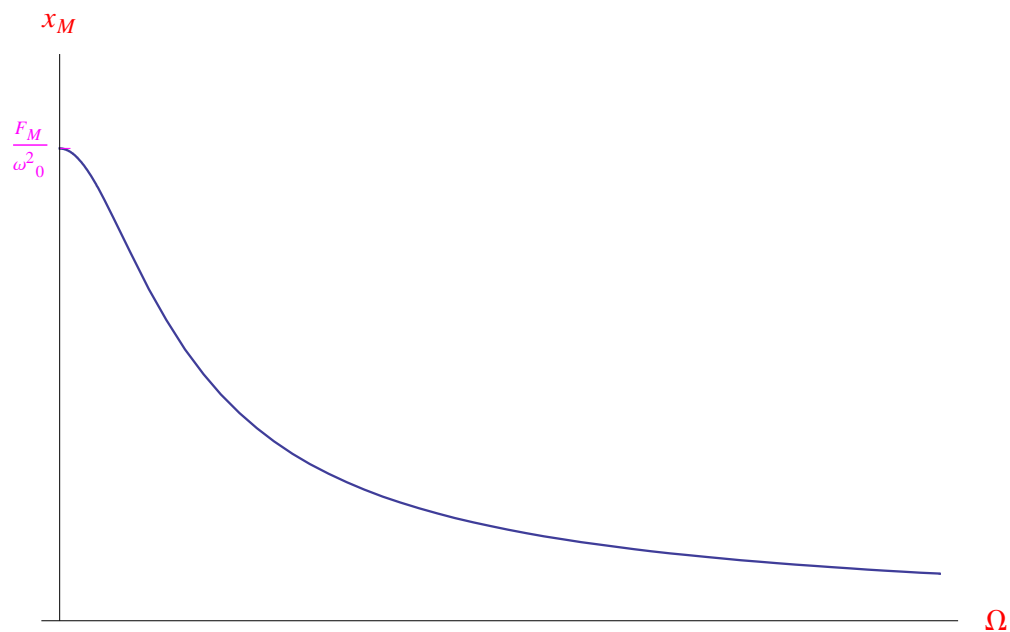


Figura 2.14: Ampiezza delle oscillazioni per l'oscillatore armonico dell'esercizio 4

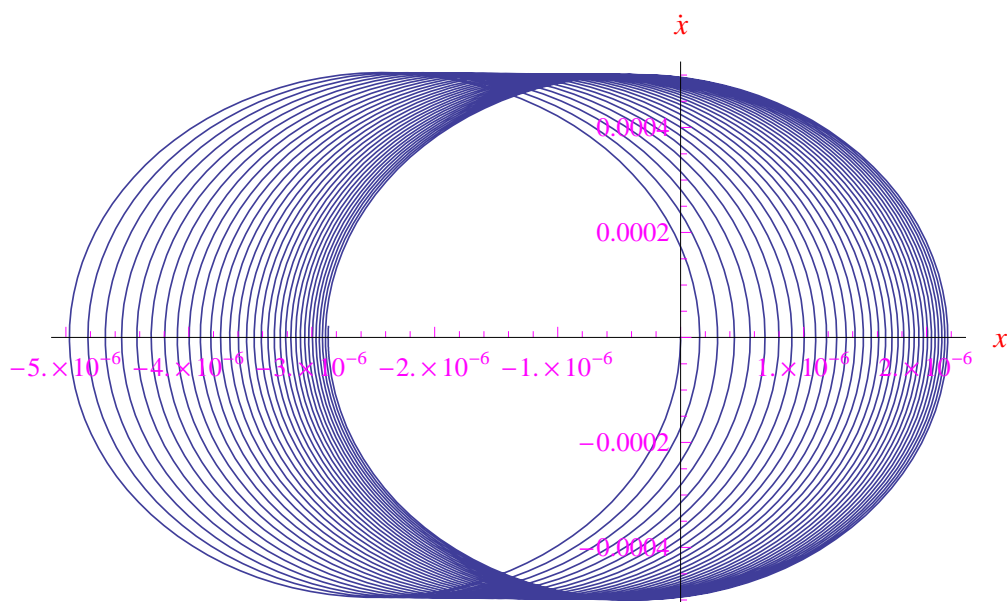


Figura 2.15: Diagramma delle orbite per l'oscillatore armonico dell'esercizio 4

. Infatti, dal momento che

$$\operatorname{Re} \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \omega_n t}{\sqrt{n}}, \quad (2.119)$$

si ha che tale grandezza può essere interpretata come il modulo di una sollecitazione esterna variabile in funzione del tempo t , ed avente uno spettro logaritmico di frequenze $\omega_n = \Omega_0 \ln n$, dove $\Omega_0 = 1 \text{ rad/s}$. Più precisamente:

$$F(t) = F_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \omega_n t}{\sqrt{n}} \right), \quad (F_0 > 0),$$

per cui l'equazione differenziale (2.72) si scrive:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \omega_n t}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.120)$$

Dal momento che la predetta funzione zeta è built-in nell'ambiente di calcolo *Mathematica*, è possibile eseguire un'integrazione numerica della (2.120) per assegnate condizioni iniziali. Per particolari valori delle costanti di tempo τ, τ_0 otteniamo i grafici riportati nelle figg. 2.16-2.17.

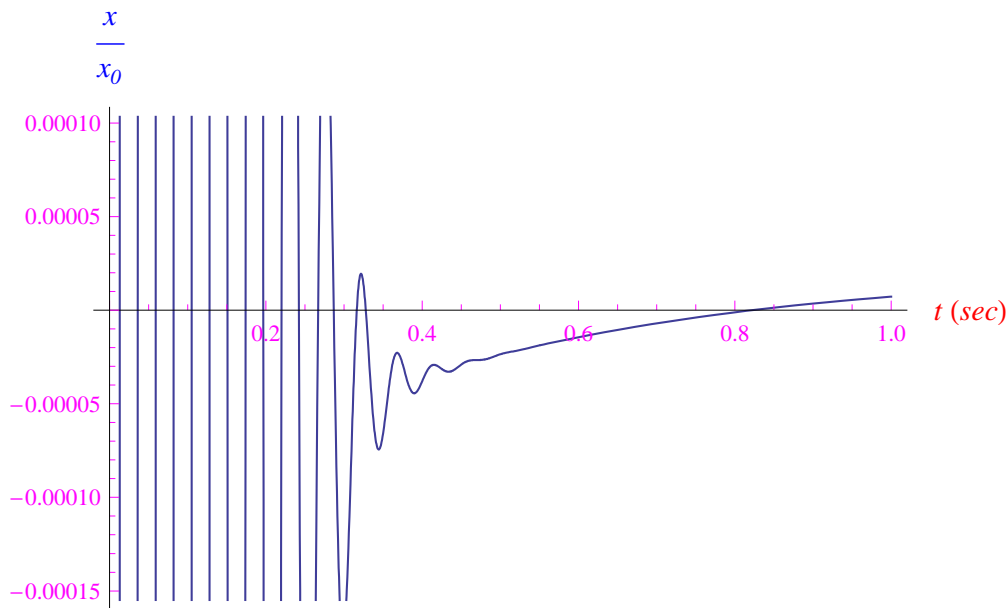


Figura 2.16: Grafico della soluzione dell' dell'equazione differenziale (2.120) ($\frac{2}{\tau} = 0.6 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ e $\omega_0 = 19600 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) nell'intervallo di tempo $t \in [0, 1]$.

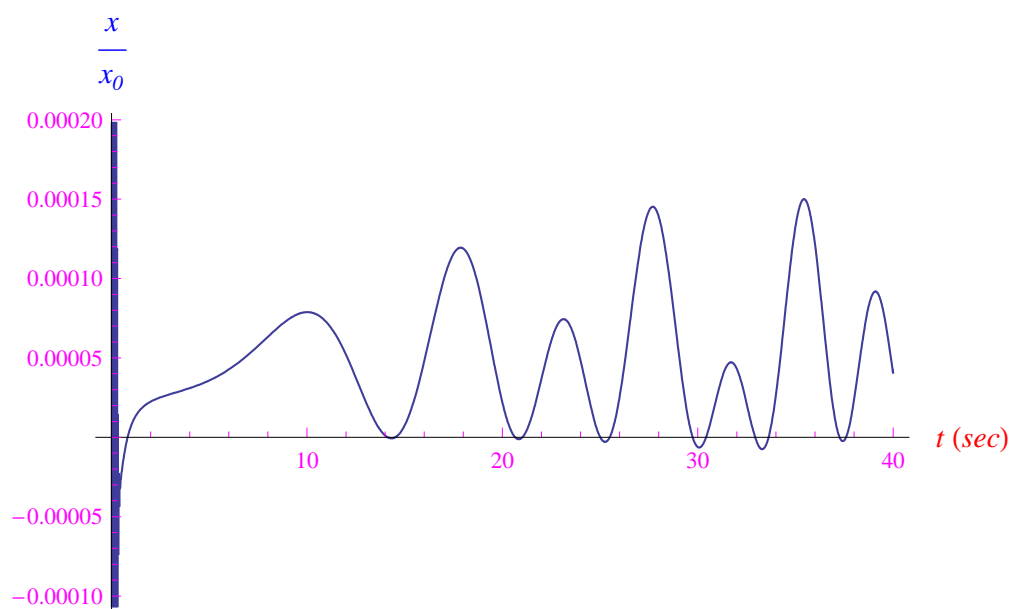


Figura 2.17: Grafico della soluzione dell'equazione differenziale (2.120) ($\frac{2}{\tau} = 0.6 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ e $\omega_0 = 19600 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) nell'intervallo di tempo $t \in [0, 40]$.

Bibliografia

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri.

[2] Spiegel M. R., *Meccanica razionale* Schaum