

Oscillatore armonico a frequenza variabile

Marcello Colozzo – www.extrabyte.info

Rammentiamo l'equazione differenziale che governa l'evoluzione dinamica di un **oscillatore armonico** unidimensionale:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

che assieme alle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

determina univocamente la predetta evoluzione, attraverso una soluzione del tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad A, \varphi = \text{costanti determinate dalle condizioni iniziali} \quad (2)$$

Supponiamo ora che la frequenza angolare sia data dalla funzione:

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_1(t) \quad \text{con} \quad \omega_1(t) \ll \omega_0 \quad (3)$$

dove il secondo termine a secondo membro agisce da termine perturbativo. In ogni caso, l'equazione differenziale del moto si riscrive:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F(x, t) \quad (4)$$

avendo moltiplicato primo e secondo membro per la massa inerziale dell'oscillatore. Il termine noto dell'equazione è:

$$F(x, t) = -m\omega_1(t) [\omega_1(t) + 2\omega_0] \quad (5)$$

ed ha le dimensioni di una forza. Ne consegue che un oscillatore armonico a frequenza variabile equivale a un oscillatore armonico con frequenza costante sottoposto a una forza posizionale non conservativa (in quanto dipende esplicitamente dal tempo). In fig. 1 il grafico della soluzione ricavata numericamente con Mathematica per l'oscillatore di pulsazione:

$$\omega(t) = 2 + 0.1e^{\alpha t} \quad (\text{rad/s}) \quad (6)$$

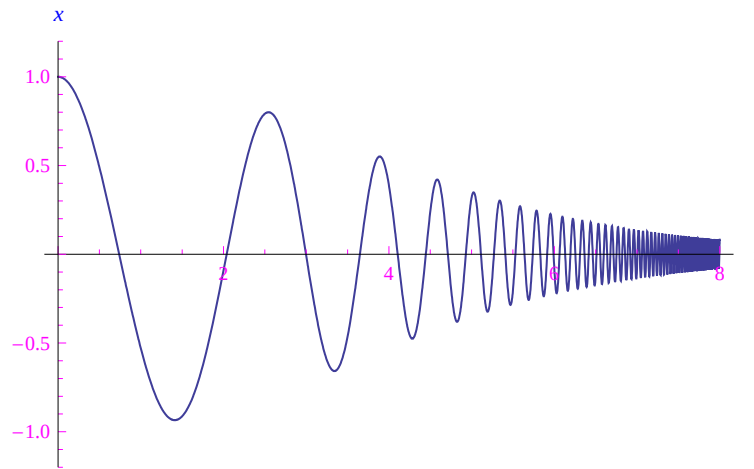


Figura 1: Andamento dell'ascissa $x(t)$ per l'oscillatore di pulsazione (6).

In fig. 2 l'andamento della soluzione nello spazio delle configurazioni.

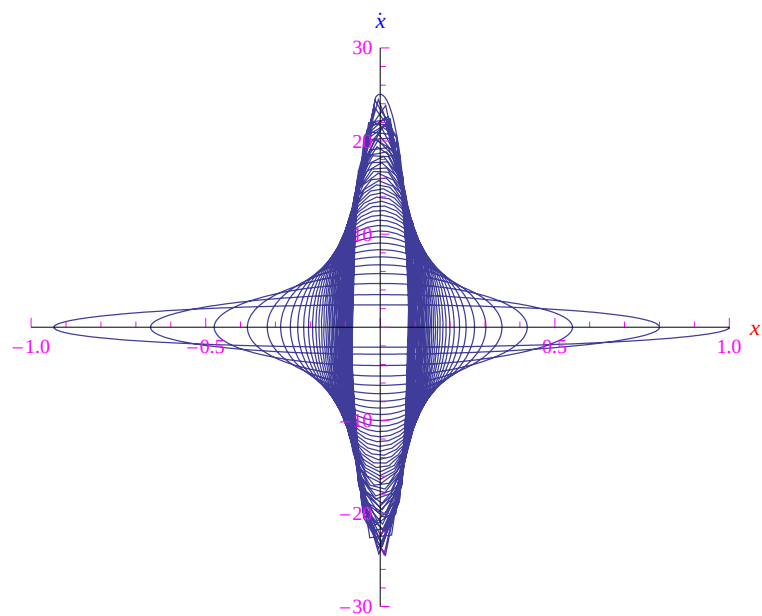


Figura 2: Soluzione nello spazio delle configurazioni per l'oscillatore di pulsazione (6).