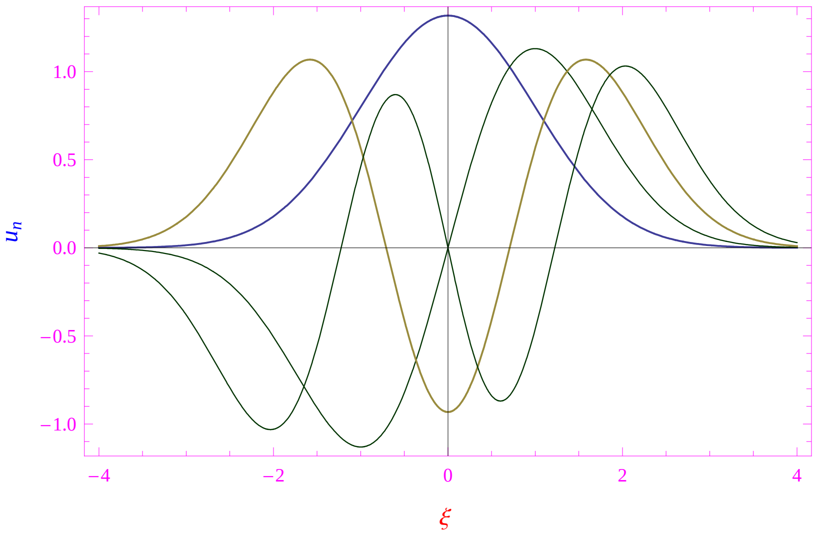
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

Il linguaggio delle funzioni d'onda della Meccanica Quantistica

Marcello Colozzo



Indice

1 Il caso dell'oscillatore armonico unidimensionale

Consideriamo un sistema quanto-meccanico costituito da una particella di massa m vincolata a muoversi sull'asse x sotto l'effetto di un potenziale di oscillatore armonico. Con ovvio significato dei simboli, l'operatore hamiltoniano del sistema si scrive:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2, \tag{1}$$

essendo ω la pulsazione (o frequenza angolare). Come è noto [1], l'operatore (1) esibisce uno spettro puramente discreto:

$$\sigma\left(\hat{H}\right) \equiv \sigma_d\left(\hat{H}\right) = \left\{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{2}$$

per cui nella notazione bracket di Dirac, l'equazione agli autovalori si scrive:

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle \tag{3}$$

Nella rappresentazione delle coordinate:

$$\hat{H} u_n(x) = E_n u_n(x), \tag{4}$$

essendo $\{u_n(x)\}_{n\in N}$ il sistema di autofunzioni:

$$u_n(x) = \langle x|n\rangle, \tag{5}$$

date da:

$$u_n(\xi) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi), \tag{6}$$

dove ξ è una variabile adimensionale definita da

$$\xi = \alpha x, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \tag{7}$$

mentre $H_n(\xi)$ sono i polinomi di Hermite. Senza perdita di generalità supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ l'oscillatore sia *preparato* in una sovrapposizione lineare del livello fondamentale ($n = 0$) e del primo livello eccitato ($n = 1$), per cui il ket di stato iniziale è

$$\left|\psi_0\right\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n^{(0)}\left|n\right\rangle, \quad c_n^{(0)} \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

rammentando che i coefficienti complessi $c_n^{(0)}$ soddisfano la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{n=0}^{1}\left|c_n^{(0)}\right|^2 = 1 \Longrightarrow \langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1,$$

in modo da poter riprodurre l'interpretazione probabilistica per ciò che riguarda una misura dell'osservabile energia. Più precisamente, facciamo prima evolvere l'oscillatore. Matematicamente ciò equivale ad applicare l'operatore di evoluzione temporale

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0 = 0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \tag{9}$$

al ket iniziale:

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0 = 0)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$$

Cioè

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0 = 0)\sum_{n=0}^{1} c_n^{(0)}|n\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{1} c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t}|n\rangle\end{aligned}$$

Cioè

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t}|n\rangle$$

avendo definito:

$$c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \tag{10}$$

Passando alla funzione d'onda:

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n(t)\, u_n(x), \tag{11}$$

ovvero un integrale dell'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

risolta con il metodo operatoriale. Si osservi che l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale alle de del secondo ordine rispetto alla coordinata spaziale x e del primo ordine rispetto alla variabile t, e le sue soluzioni sono grandezze complesse. È un'equazione d'onda giacché regola la propagazione dell'onda di probabilità di trovare la particella al tempo t in un intorno infinitesimo del punto assegnato. Più precisamente:

$$|\psi(x,t)|^2\, dx = dw,$$

essendo dw la probabilità di trovare al tempo t la particella nel segmento infinitesimo $[x, x+dx]$.

Calcoliamo i coefficienti a tutti i tempi:

$$c_0(t) = c_0^{(0)} e^{-\frac{i\omega}{2}t}, \quad c_1(t) = c_1^{(0)} e^{-\frac{3i\omega}{2}t},$$

supponendo che inizialmente gli autostati con $n = 0$ e $n = 1$ siano equiprobabili con coefficienti reali:

$$c_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

Immettendo tali grandezze nell'espressione della funzione d'onda, ed esplicitando i primi due polinomi di Hermite, si trova:

$$\psi(\xi,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega}{2}t} + e^{-\frac{3i\omega}{2}t}\xi\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{13}$$

Riferimenti bibliografici

[1] P. Caldirola, R. Cirelli, G.M. Prosperi, *Introduzione alla Fisica Teorica,* BUR, 1982

[2] P. A. M. Dirac, *I principi della Meccanica Quantistica,* Boringhieri, Torino, 1959.