Operazioni razionali sulle funzioni reali

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Sia

$$\begin{aligned} f : X & \to Y \\ x & \longrightarrow f(x), \ \forall x \in X \end{aligned} \tag{1}$$

una funzione reale.

Definizione 1 *Dicesi* **opposta** *di f, la funzione:*

$$\begin{aligned} -f : X & \to Y \\ x & \longrightarrow -f(x), \ \forall x \in X \end{aligned} \tag{2}$$

Ricordiamo che il grafico di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \ \ y = f(x) \right\}$$

Conseguentemente, il grafico della funzione opposta è:

$$\Gamma_{-f} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \ \ y = -f(x) \right\},$$

ed è manifestamente simmetrico di Γ_f. rispetto all'asse x.

Definizione 2 *Dicesi* **reciproca** *di f, la funzione:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} : X' & \to Y \\ x & \longrightarrow \frac{1}{f(x)}, \ \forall x \in X \end{aligned}, \tag{3}$$

essendo $X' = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Cioè, l'insieme di definizione X' della reciproca si ottiene da X privandolo degli zeri di f.

È immediato definire nella classe delle funzioni reali di una variabile reale, le operazioni di **somma**, **prodotto**, **rapporto** (o **quoziente**). Più specificatamente, assegnate le funzioni:

$$\begin{aligned} f_1 : X & \to Y \\ x & \longrightarrow f_1(x), \ \forall x \in X \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} f_2 : X & \to Y \\ x & \longrightarrow f_2(x), \ \forall x \in X \end{aligned}$$

La somma è la funzione:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 : X_1 \cap X_2 & \to Y \\ x & \longrightarrow f_1(x) + f_2(x), \ \forall x \in X \end{aligned}, \tag{4}$$

da cui possiamo definire in modo ovvio la differenza, i.e la somma di f_1 con la funzione opposta di f_2:

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 : X_1 \cap X_2 & \to Y \\ x & \longrightarrow f_1(x) - f_2(x), \ \forall x \in X \end{aligned}, \tag{5}$$

Il prodotto:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : X_1 \cap X_2 & \to Y \\ x & \longrightarrow f_1(x) \cdot f_2(x), \ \forall x \in X \end{aligned}, \tag{6}$$

Il rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} : (X_1 \cap X_2)' & \to Y \\ x & \longrightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \ \forall x \in X \end{aligned}, \tag{7}$$

essendo $(X_1 \cap X_2)' = \{x \in X_1 \cap X_2 \mid f_2(x) \neq 0\}$. Tali definzioni si estendono a un numero finito di funzioni, per ciò che riguarda la somma e il prodotto. Più precisamente, date n funzioni reali:

$$f_k : \underset{x \longrightarrow f_k(x),\ \forall x \in X}{X \to Y}, \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{8}$$

La somma delle n funzioni (8) è:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k : \underset{x \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ \forall x \in X}{\bigcap_{k=1}^{n} X_k \to Y} \tag{9}$$

Il prodotto delle n funzioni (8) è:

$$\prod_{k=1}^{n} f_k : \underset{x \longrightarrow \prod_{k=1}^{n} f_k(x),\ \forall x \in X}{\bigcap_{k=1}^{n} X_k \to Y} \tag{10}$$

Se $f_k = f, \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\prod_{k=1}^{n} f_k = f^n,$$

cioè la **potenza di f di esponente** n.

Abbiamo il caso particolare in cui uno degli addendi (o dei fattori) è la funzione costante, avendosi:

$$f + c : X \cap \mathbb{R} = \underset{x \longrightarrow f(x)+c,\ \forall x \in X}{X \to Y}$$

$$cf : X \cap \mathbb{R} = \underset{x \longrightarrow f(x)c,\ \forall x \in X}{X \to Y}$$

da cui segue la definzione:

Definizione 3 *Dicesi* **combinazione lineare** *delle funzioni (8) di coefficienti c_k ($k = 1, 2, ..., n$) la funzione:*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k : \underset{x \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ \forall x \in X}{\bigcap_{k=1}^{n} X_k \to Y} \tag{11}$$

Ad una qualunque funzione reale f possiamo associare univocamente la coppia ordinata (f_+, f_-), dove:

$$f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \ f_- = \frac{f - |f|}{2}$$

Prima di stabilire le proprietà delle funzioni $f_\pm$, osserviamo che

$$f = f_+ + f_-,$$

cioè f si decompone nella somma delle funzioni f_1 e f_2. Poniamo:

$$\begin{aligned} X_+ &= \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} \\ X_- &= \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}, \end{aligned}$$

risultando $X = X_+ \cup X_-$. In particolare se f è non negativa, si ha $X_- = \emptyset$, e viceversa. Inoltre:

$$\begin{aligned} &\forall x \in X_+, \ |f(x)| = f(x) \Longrightarrow f_+(x) = f(x), \ f_-(x) = 0 \\ &\forall x \in X_-, \ |f(x)| = -f(x) \Longrightarrow f_+(x) = 0, \ f_-(x) = f(x), \end{aligned}$$

o ciò che è lo stesso:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in X_+ \\ 0, & \text{se } x \in X_- \end{cases}, \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } x \in X_- \\ 0, & \text{se } x \in X_+ \end{cases}$$

Ciò suggerisce di chiamare le funzioni $f_\pm$ rispettivamente la **parte non negativa** e la **parte non positiva** di f. La fig. 1 riassume graficamente le definizioni appena viste.

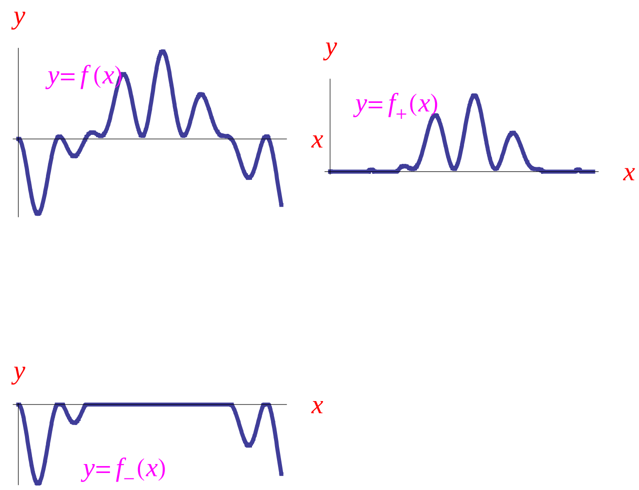

Figura 1: Grafici delle funzioni $f(x)$, $f_+(x)$, $f_-(x)$, per un'assegnata funzione $f(x)$.