La notazione di Dirac

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 Introduzione. Il Teorema di Riesz

Assegnato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, consideriamo il suo spazio duale:

$$^*\mathcal{H} = \hom(\mathcal{H}, \mathbb{C}), \tag{1}$$

Cioè gli elementi di $^*\mathcal{H}$ sono gli omomorfismi da $\mathcal{H}$ a $\mathbb{C}$ (considerato spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ medesimo):

$$\begin{aligned} &\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \\ &\phi : \xi \to \phi(\xi) \in \mathbb{C}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{2}$$

detti anche *funzionali lineari* o *forme lineari algebriche*. Riesce:

$$\dim(^*\mathcal{H}) = (\dim \mathcal{H}) \cdot (\dim \mathbb{C}) = \dim \mathcal{H}, \tag{3}$$

cioè $\mathcal{H}$ e $^*\mathcal{H}$ sono isodimensionali. Per un noto teorema, segue che essi sono isomorfi.

Teorema 1 *(Teorema di Riesz)*

$$\phi \in (^*\mathcal{H}) \Longrightarrow \exists! \hat{\phi} \in \mathcal{H} \mid \phi(\xi) = \left\langle \hat{\phi}, \xi \right\rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \tag{4}$$

dove $\langle , \rangle$ *denota il prodotto scalare in* $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Facciamo riferimento alla fig. 1, dove è visibile l'azione di un elemento $\phi \in (^*\mathcal{H})$ su un qualunque vettore ξ di $\mathcal{H}$. Consideriamo il kernel dell'operatore lineare ϕ:

$$\ker \phi = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \phi(\xi) = 0\} \tag{5}$$

Come è noto, si tratta di un sottospazio di $\mathcal{H}$ la cui dimensione si dice *nullità* di ϕ:

$$N(\phi) = \dim \ker \phi \tag{6}$$

Se $N(\phi) = \dim \mathcal{H} \overset{def}{=} n \leq +\infty$ si ha

$$\ker \phi = \mathcal{H} \Longrightarrow \phi \text{ è il funzionale nullo} : \phi(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

In tal caso la (4) è immediatamente verificata dal vettore nullo di $\mathcal{H}$ e l'asserto è banale. Consideriamo quindi

$$N(\phi) < n$$

Riesce

$$\mathcal{H} = \ker \phi \oplus (\ker \phi)^{\perp}, \tag{7}$$

dove $(\ker \phi)^{\perp}$ è il supplementare ortogonale di $\ker \phi$:

$$\eta \in (\ker \phi)^{\perp} \Longleftrightarrow \langle \eta, \xi \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \ker \phi \tag{8}$$

Per definizione di somma diretta, si ha:

$$\forall \xi \in \mathcal{H}, \ \exists! \left(\xi_{\ker \phi}, \xi_{(\ker \phi)^{\perp}} \right) \in \ker \phi \times (\ker \phi)^{\perp} \mid \xi = \xi_{(\ker)} + \xi_{(\ker \phi)^{\perp}} \tag{9}$$

Cioè, ogni vettore di $\mathcal{H}$ si decompone in modo univoco nella somma di un vettore di $\ker\phi$ e $(\ker\phi)^{\perp}$. È univocamente definita la coppia ordinata di proiettori $\left(\hat{\pi}_{\ker\phi},\, \hat{\pi}_{(\ker\phi)^{\perp}}\right)$:

$$\hat{\pi}_{\ker\phi}\xi = \xi_{\ker\phi}, \quad \hat{\pi}_{(\ker\phi)^{\perp}}\xi = \xi_{(\ker\phi)^{\perp}}, \quad \forall\xi \in \mathcal{H} \tag{10}$$

Poniamo

$$\xi_{\ker\phi} = \xi_1, \;\; \xi_{(\ker\phi)^{\perp}} = \lambda\eta, \quad (\lambda \in \mathbb{C}), \tag{11}$$

avendosi

$$\langle \xi_1, \eta \rangle = 0 \tag{12}$$

Dalla (9) segue

$$\xi = \xi_1 + \lambda\eta, \quad \xi \in \mathcal{H} \tag{13}$$

Applicando ϕ a primo e secondo membro della (13):

$$\phi(\xi) = \phi(\xi_1 + \lambda\eta) \underset{\phi \text{ è lineare}}{=} \underbrace{\phi(\xi_1)}_{=0 \Longleftarrow \xi_1 \in \ker\phi} + \lambda\phi(\eta) = \lambda\phi(\eta) \tag{14}$$

Moltiplicando scalarmente primo e secondo membro della (13) per η:

$$\langle \eta, \xi \rangle = \underbrace{\langle \eta, \xi_1 \rangle}_{=0 \Longleftarrow \eta \in (\ker\phi)^{\perp}} + \lambda \langle \eta, \eta \rangle = \lambda \langle \eta, \eta \rangle \tag{15}$$

Per $\eta \neq 0$ dividiamo membro a membro le (14)-(15):

$$\frac{\phi(\xi)}{\langle \eta, \xi \rangle} = \frac{\phi(\eta)}{\langle \eta, \eta \rangle},$$

da cui

$$\phi(\xi) = \frac{\phi(\eta)}{\langle \eta, \eta \rangle} \langle \eta, \xi \rangle, \quad \forall\xi \in \mathcal{H}, \tag{16}$$

che può essere scritta come

$$\phi(\xi) = \left\langle \frac{\phi(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta, \xi \right\rangle \tag{17}$$

Eseguiamo la posizione

$$\hat{\phi} \overset{def}{=} \frac{\phi(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta, \tag{18}$$

onde

$$\phi(\xi) = \left\langle \hat{\phi}, \xi \right\rangle, \quad \forall\xi \in \mathcal{H},$$

con $\hat{\phi} \in (\ker\phi)^{\perp} - \{0\} \Longrightarrow \hat{\phi} \in \mathcal{H}$ univocamente definito dalla (18). ■

Conclusione 2 *In corrispondenza di un qualunque funzionale lineare ϕ dello spazio duale ${}^*\mathcal{H}$, è univocamente definito un vettore $\hat{\phi}$ di $\mathcal{H}$ tale che il valore assunto da ϕ su un arbitrario vettore ξ di $\mathcal{H}$, è dato dal prodotto scalare di $\hat{\phi}$ per ξ.*

La predetta corrispondenza è un'applicazione Ω da ${}^*\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} &\Omega : ({}^*\mathcal{H}) \to \mathcal{H} \\ &\Omega : \phi \to \hat{\phi} = \Omega(\phi), \;\; \forall\phi \in ({}^*\mathcal{H}) \end{aligned} \tag{19}$$

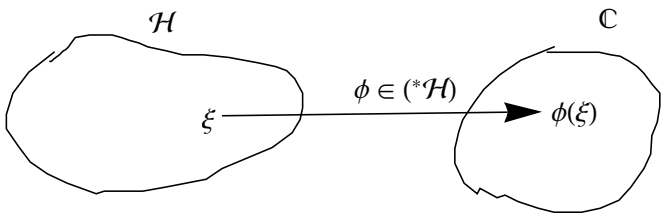

Figura 1: Un elemento ϕ dello spazio duale ${}^*\mathcal{H}$, associa al vettore ξ lo scalare $\phi\,(\xi)$.

Dalla (18):

$$\Omega(\phi) = \frac{\phi(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta, \quad \eta \in (\ker \phi)^\perp - \{0\} \tag{20}$$

Comunque prendiamo $\phi_1, \phi_2 \in ({}^*\mathcal{H})$:

$$\Omega(\phi_1) = \frac{\phi_1(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta, \quad \Omega(\phi_2) = \frac{\phi_2(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta \tag{21}$$

Chiaramente

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \Longrightarrow \phi \in ({}^*\mathcal{H}),$$

onde

$$\Omega(\phi) = \frac{[\phi_1(\eta) + \phi_2(\eta)]^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta = \frac{\phi_1(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta + \frac{\phi_2(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta$$

Cioè

$$\Omega(\phi) = \Omega(\phi_1) + \Omega(\phi_2), \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in ({}^*\mathcal{H}) \tag{22}$$

Inoltre, comunque prendiamo $\phi \in ({}^*\mathcal{H})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha $(\lambda\phi) \in ({}^*\mathcal{H})$. Segue

$$\Omega(\lambda\phi) = \frac{\lambda^*\phi(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle}\eta,$$

ovvero

$$\Omega(\lambda\phi) = \lambda^*\Omega(\phi), \quad \forall \phi \in ({}^*\mathcal{H}), \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{23}$$

Le (22)-(23) possono essere inglobate in

$$\Omega(\lambda\phi_1 + \mu\phi_2) = \lambda^*\Omega(\phi_1) + \mu^*\Omega(\phi_2), \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in ({}^*\mathcal{H}), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \tag{24}$$

La proprietà (24) implica che l'applicazione Ω che associa il funzionale ϕ al vettore $\hat{\phi}$ è *antilineare*. L'azione di Ω è illustrata in (2).

L'applicazione (19) è invertibile:

$$\begin{aligned} &\Omega^{-1} : \mathcal{H} \to ({}^*\mathcal{H}) \\ &\Omega^{-1} : \eta \to \hat{\eta} = \Omega^{-1}(\eta), \ \forall \eta \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{25}$$

ed è facile convincersi che Ω^{-1} è a sua volta antilineare.

Conclusione 3 *Abbiamo dunque una corrispondenza biunivoca tra uno spazio di Hilbert e il suo duale: a ogni $\phi \in ({}^*\mathcal{H})$ corrisponde univocamente $\hat{\phi} \in \mathcal{H}$ tale che $\phi(\xi) = \left\langle \hat{\phi}, \xi \right\rangle$, $\forall \xi \in \mathcal{H}$. Viceversa, a ogni $\eta \in \mathcal{H}$ corrisponde univocamente $\hat{\eta} \in ({}^*\mathcal{H})$ tale che $\hat{\eta}(\xi) = \langle \eta, \xi \rangle$, $\forall \xi \in \mathcal{H}$.*

Osservazione 4 *Chiamiamo la predetta corrispodenza biunivoca,* ***corrispondenza duale****. In simboli:*

$$\eta \in \mathcal{H} \overset{CD}{\longleftrightarrow} \hat{\eta} \in ({}^*\mathcal{H}), \tag{26}$$

dove "CD" sta per corrispondenza duale.

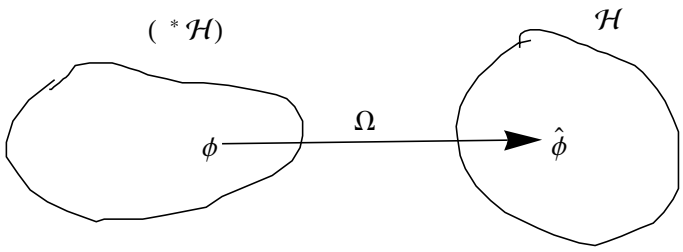

Figura 2: Ad ogni funzionale $\phi \in ({}^*\mathcal{H})$ possiamo associare univocamente – attraverso un'applicazione antilineare Ω – un vettore $\hat{\phi} \in \mathcal{H}$ tale che $\phi(\xi) = \left\langle \hat{\phi}, \xi \right\rangle,\ \forall \xi \in \mathcal{H}$.

2 La notazione di Dirac

Fino ad ora abbiamo denotato gli elementi di $\mathcal{H}$ con simboli del tipo:

$$\xi, \eta, ... \tag{27}$$

e gli elementi di ${}^*\mathcal{H}$ con simboli del tipo

$$\phi, \psi, ... \tag{28}$$

Dirac, invece, indica gli elementi di $\mathcal{H}$ con simboli del tipo:

$$|\xi\rangle, |\eta\rangle, ... \tag{29}$$

e li chiama *vettori ket*. Un qualunque funzionale $\phi \in ({}^*\mathcal{H})$ Dirac lo indica con $\langle\phi|$ e lo chiama *vettore bra*. Ricapitolando:

$$|\xi\rangle \in \mathcal{H}, \ \ \langle\phi| \in ({}^*\mathcal{H}) \tag{30}$$

Come indichiamo con questa notazione il valore assunto da ϕ su ξ, cioè lo scalare $\phi(\xi)$? La risposta più ovvia è: $\langle\phi|\xi\rangle$ e si legge *bra(c)ket*. La (26) nella notazione di Dirac si scrive:

$$|\eta\rangle \in \mathcal{H} \overset{\text{CD}}{\longleftrightarrow} \langle\eta| \in ({}^*\mathcal{H}) \tag{31}$$

con

$$\langle\eta| \in ({}^*\mathcal{H}) \mid \langle\eta|\xi\rangle = \text{valore assunto dal funzionale lineare } \langle\eta| \text{ su } |\xi\rangle \tag{32}$$

In altri termini, non utilizziamo più il simbolo $\hat{\eta}$ per denotare il funzionale univocamente associato al vettore η, bensì il simbolo $\langle\eta|$. Per quanto precede, si ha:

$$\langle\phi|\xi\rangle = \text{ valore assunto dal funzionale } \langle\phi| \text{ sul vettore } |\xi\rangle \in \mathcal{H} \tag{33}$$

Per il teorema (1):

$$\exists!\hat{\phi} \in \mathcal{H} \mid \langle\phi|\xi\rangle = \left\langle\hat{\phi}, \xi\right\rangle, \quad |\xi\rangle \in \mathcal{H} \tag{34}$$

Tuttavia $\langle\phi|\xi\rangle = \left\langle\hat{\phi}, \xi\right\rangle$ è un'espressione "ibrida", nel senso che il primo membro è in notazione di Dirac, mentre il secondo membro è in notazione usuale. Per uniformità di notazione, dovremmo scrivere:

$$\langle\phi|\xi\rangle = \langle|\phi\rangle, |\xi\rangle\rangle$$

Tale identità suggerisce semplicemente di adottare il simbolo $\langle\phi|\xi\rangle$ per il prodotto scalare tra i vettori $|\phi\rangle, |\xi\rangle \in \mathcal{H}$. Quindi in generale, comunque prendiamo i vettori ket $|\xi\rangle, |\eta\rangle \in \mathcal{H}$, il loro prodotto scalare lo denotiamo con $\langle\eta|\xi\rangle$. Per definizione di prodotto scalare in uno spazio di Hilbert, si ha:

$$\langle\eta|\xi\rangle = \langle\xi|\eta\rangle^* \tag{35}$$

Dalla antilinearità di Ω^{-1}:

$$\Omega^{-1}(\lambda\eta) = \lambda^*\Omega^{-1}(\eta),$$

che nella notazione di Dirac si scrive:

$$\Omega^{-1}(\lambda|\eta\rangle) = \lambda^*\Omega^{-1}(|\eta\rangle) = \langle\eta|\lambda^*$$

Cioè

$$\lambda|\eta\rangle \overset{\text{CD}}{\longleftrightarrow} \langle\eta|\lambda^* \tag{36}$$

Vediamo come si esprimono alcune operazioni tipiche utilizzando la notazione di Dirac.

2.1 Componenti di un vettore in una base ortonormale

Sia data una base ortornormale:

$$\{e_k\} \subset \mathcal{H} \mid \langle e_k, e_{k'} \rangle = \delta_{kk'}, \quad \text{con } k, k' = 1, 2, ..., n = \dim \mathcal{H}, \tag{37}$$

essendo $\delta_{kk'}$ la delta di Kronecker. Abbiamo

$$\xi \in \mathcal{H} \Longrightarrow \exists! \, (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n \mid \xi = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

dove $c_1, ..., c_n$ sono le componenti del vettore ξ nella base (37):

$$c_k = \langle e_k, \xi \rangle , \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{38}$$

che si ottiene moltiplicando scalarmente per e_k primo e secondo membro di

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

Infatti:

$$\langle e_k, \xi \rangle = \sum_{k'=1}^{n} c_{k'} \langle e_k, e_{k'} \rangle = \sum_{k'=1}^{n} c_{k'} \delta_{kk'},$$

cioè la (38). Segue:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, \xi \rangle \, e_k \tag{39}$$

Passando alla notazione di Dirac:

$$|\xi\rangle = \sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k|\xi\rangle , \tag{40}$$

che può essere scritta come:

$$|\xi\rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k| \right) |\xi\rangle , \quad \forall \, |\xi\rangle \in \mathcal{H} \tag{41}$$

Ciò implica

$$\sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k| = \hat{1}, \tag{42}$$

dove $\hat{1}$ è l'operatore identità. La (42) è nota come *relazione di completezza* in $\mathcal{H}$, nel senso che esprime la completezza del sistema di vettori $\{|e_1\rangle , ..., |e_n\rangle\}$. D'altra parte il proiettore lungo $|e_k\rangle$ è:

$$\hat{\pi}_k = |e_k\rangle \langle e_k| , \tag{43}$$

giacché

$$\hat{\pi}_k |\xi\rangle = |e_k\rangle \langle e_k|\xi\rangle , \quad \forall \, |\xi\rangle \in \mathcal{H},$$

ovvero la componente di $|\xi\rangle$ nella direzione di $|e_k\rangle$. Ne consegue che la relazione di completezza può scriversi:

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{\pi}_k = \hat{1},$$

come appunto deve essere.

2.2 Prodotto scalare in termini di componenti.

Presi i vettori

$$|\xi\rangle = \sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k|\xi\rangle \,, \quad |\eta\rangle = \sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k|\eta\rangle \,, \tag{44}$$

il prodotto scalare si può formalmente scrivere:

$$\langle\eta|\xi\rangle = \langle\eta| \left(\hat{1}\,|\xi\rangle\right) = \langle\eta|\hat{1}|\xi\rangle$$

Tenendo conto della (42):

$$\begin{aligned}\langle\eta|\xi\rangle &= \langle\eta| \left(\sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k|\right) |\xi\rangle \\ &= \langle\eta| \sum_{k=1}^{n} |e_k\rangle \langle e_k|\xi\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle\eta|e_k\rangle \langle e_k|\xi\rangle\end{aligned}$$

Per la (35):

$$\langle\eta|\xi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k|\eta\rangle^* \langle e_k|\xi\rangle \tag{45}$$

Se $|\eta\rangle = |\xi\rangle$ otteniamo il quadrato della norma di $|\xi\rangle$:

$$|||\xi\rangle||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k|\xi\rangle^* \langle e_k|\xi\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k|\xi\rangle|^2 \tag{46}$$

2.3 Cambiamento di base

Siano $\{|e_k\rangle\}$ e $\{|e'_k\rangle\}$ due basi ortonormali di uno stesso spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. I vettori $|e'_k\rangle$ si esprimono come combinazione lineare dei vettori della prima base. Lo sviluppo si ottiene facilmente osservando che formalmente possiamo scrivere:

$$|e'_k\rangle = \hat{1}\,|e'_k\rangle \tag{47}$$

Ma $\hat{1} = \Sigma_h\, |e_h\rangle \langle e_h|$, per cui

$$|e'_k\rangle = \sum_{h=1}^{n} |e_h\rangle \langle e_h|e'_k\rangle = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{hk}\, |e_h\rangle \,, \tag{48}$$

dove

$$\alpha_{hk} \stackrel{def}{=} \langle e_h|e'_k\rangle \,, \tag{49}$$

elemento di matrice di

$$P = (\alpha_{hk}) \,, \tag{50}$$

che è la matrice di passaggio dalla base $\{|e_k\rangle\}$ alla base $\{|e'_k\rangle\}$. Riesce

$$P \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\,(n) \,, \tag{51}$$

essendo $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le matrici quadrate di ordine n sul campo complesso. Viceversa:

$$|e_k\rangle = \hat{1}\,|e_k\rangle \tag{52}$$

Esprimiamo l'operatore identità nel seguente modo:

$$\hat{1} = \sum_{h=1}^{n} |e'_h\rangle\,\langle e'_h|\,, \tag{53}$$

per cui

$$|e_k\rangle = \sum_{h=1}^{n} |e'_h\rangle\,\langle e'_h|e_k\rangle = \sum_{h=1}^{n} \alpha'_{hk}\,|e'_h\rangle\,, \tag{54}$$

essendo

$$\alpha'_{hk} = \langle e'_h|e_k\rangle\,, \tag{55}$$

elemento di matrice di

$$P' = (\alpha'_{hk})\,, \tag{56}$$

quale matrice di passaggio dalla base $\{|e'_k\rangle\}$ alla base $\{|e_k\rangle\}$. Per stabilire il legame tra le matrici P e P' riscriviamo la (54):

$$|e_k\rangle = \sum_{h=1}^{n} \alpha'_{hk}\,|e'_h\rangle \tag{57}$$

Fissiamo ora la nostra attenzione sulla (48). Ridefiniamo l'indice muto della sommatoria:

$$|e'_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\,|e_i\rangle\,,$$

e l'indice libero k:

$$|e'_h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}\,|e_i\rangle \tag{58}$$

che va sostituita nel secondo membro della (57):

$$\begin{aligned} |e_k\rangle &= \sum_{h=1}^{n} \alpha'_{hk} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ih}\,|e_i\rangle \\ &= \sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha'_{hk}\alpha_{ih}\,|e_i\rangle \end{aligned}$$

Cioè

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha'_{hk}\alpha_{ih}\,|e_i\rangle - |e_k\rangle = 0 \tag{59}$$

D'altra parte

$$|e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}\,|e_i\rangle\,, \tag{60}$$

onde la (59) diventa:

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha'_{hk}\alpha_{ih}\,|e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}\,|e_i\rangle = 0$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n}\alpha'_{hk}\alpha_{ih}-\delta_{ki}\right)|e_i\rangle=0 \tag{61}$$

Definiamo gli scalari:

$$\lambda_i^{(k)}=\sum_{h=1}^{n}(\alpha'_{hk}\alpha_{ih})-\delta_{ki},\quad i=1,2,...,n \text{ per un assegnato } k\in\{1,...,n\} \tag{62}$$

In tal modo la (61) diventa:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(k)}|e_i\rangle=0\Longrightarrow\lambda_1^{(k)}=\lambda_2^{(k)}=...=\lambda_n^{(k)}=0,\quad\forall k\in\{1,2,...,n\},$$

giacché $\{|e_i\rangle\}$ è linearmente indipendente. Dalla (62):

$$\sum_{h=1}^{n}\alpha'_{hk}\alpha_{ih}=\delta_{ki}\Longleftrightarrow P'P=\bar{1}, \tag{63}$$

essendo $\bar{1}$ la matrice identità di ordine n. Allo stesso modo si dimostra

$$PP'=\bar{1} \tag{64}$$

Ne concludiamo che P' è la matrice inversa di P:

$$P'=P^{-1} \tag{65}$$