Studio di una funzione

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Studiare la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione

Simmetrie

La funzione è manifestamente dispari $f(-x) \equiv -f(x)$.

Simmetrie

Vediamo nel punto $x = 0$

$$|f(x)| = \left| e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} \right| \leq \left| e^{-1/x^2} \right|,$$

per cui

$$-e^{-1/x^2} \leq f(x) \leq e^{-1/x^2} \tag{2}$$

Le funzioni $\pm e^{-1/x^2}$ sono infinitesime per $x \to 0$, onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Ne concludiamo che la funzione è continua in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} e^{-1/x^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \sin \frac{10}{x}}_{=0} = 0$$

Tuttavia, l'asse x non è asintoto orizzontale giacchè dalla (2) vediamo che il grafico oscilla tra le curve $y = \pm e^{-1/x^2}$.

Derivabilità

La derivata prima nel punto $x = 0$, può essere valutata applicando direttamente la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{-1/x^2}}{x} \sin \frac{10}{x} \right)$$

Qui abbiamo il limite del prodotto di due funzioni, di cui una non regolare ($\sin \frac{10}{x}$) e l'altra infinitesima per $x \to 0$. La funzione non regolare è comunque limitata intorno al predetto punto, onde il limite è nullo:

$$f'(0) = 0$$

Per $x \neq 0$ applichiamo le regole di derivazione, ottenendo

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} - \frac{10}{x^2} e^{-1/x^2} \cos \frac{10}{x}$$

Per le stesse considerazioni:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

Ne segue che la derivata prima è continua in $x = 0$. Tale procedimento può essere iterato a tutti gli ordini, giungendo così alla conclusione che la funzione assegnata è continua insieme alle sue derivate di ordine comunque elevato. In altri termini, la funzione è di classe C^{∞}. Tuttavia non è di classe C^{ω} i.e. non è analitica, in quanto non è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di $x = 0$. Precisamente, il predetto sviluppo è identicamente nullo, mentre la funzione non è identicamente nulla in un intorno dello zero.

Si noti che il punto $x = 0$ è punto estremale ma non estremante, i.e. non è di max/min relativo, in quanto in ogni intorno di $x = 0$ il grafico della funzione compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \to 0$, per cui in ogni intorno di tale punto esistono x tali che $f(x) > f(0)$ e punti x' tali che $f(x') < f(0)$.

Il grafico è tracciato in fig. 1.

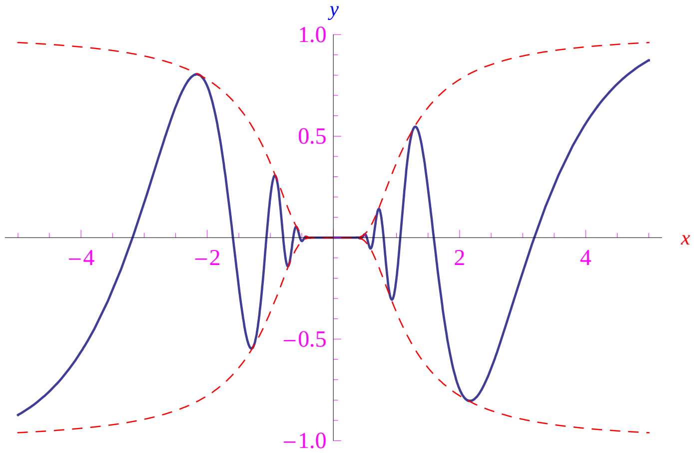

Figura 1: Grafico della funzione 1.