# Studio di una funzione

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x}, & per \ x \neq 0 \\ 0, & per \ x = 0 \end{cases}$$
 (1)

## Soluzione

### Simmetrie

La funzione è manifestamente dispari  $f(-x) \equiv -f(x)$ .

#### Simmetrie

Vediamo nel punto x = 0

$$|f(x)| = \left| e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} \right| \le \left| e^{-1/x^2} \right|,$$

per cui

$$-e^{-1/x^2} \le f(x) \le e^{-1/x^2} \tag{2}$$

Le funzioni  $\pm e^{-1/x^2}$  sono infinitesime per  $x \to 0$ , onde per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Ne concludiamo che la funzione è continua in x = 0. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm \infty} \left( e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \to \pm \infty} e^{-1/x^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \pm \infty} \sin \frac{10}{x}}_{=0} = 0$$

Cioè l'asse x è asintoto orizzontale.

#### Derivabilità

La derivata prima nel punto x=0, può essere valutata applicando direttamente la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{-1/x^2}}{x} \sin \frac{10}{x}\right)$$

Qui abbiamo il limite del prodotto di due funzioni, di cui una non regolare  $(\sin \frac{10}{x})$  e l'altra infinitesima per  $x \to 0$ . La funzione non regolare è comunque limitata intorno al predetto punto, onde il limite è nullo:

$$f'(0) = 0$$

Per  $x \neq 0$  applichiamo le regole di derivazione, ottenendo

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}\sin\frac{10}{x} - \frac{10}{x^2}e^{-1/x^2}\cos\frac{10}{x}$$

Per le stesse considerazioni:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

Ne segue che la derivata prima è continua in x = 0. Tale procedimento può essere iterato a tutti gli ordini, giungendo così alla conclusione che la funzione assegnata è continua insieme

alle sue derivate di ordine comunque elevato. In altri termini, la funzione è di classe  $C^{\infty}$ . Tuttavia non è di classe  $C^{\omega}$  i.e. non è analitica, in quanto non è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x=0. Precisamente, il predetto sviluppo è identicamente nullo, mentre la funzione non è identicamente nulla in un intorno dello zero.

Si noti che il punto x = 0 è punto estremale ma non estremante, i.e. non è di max/min relativo, in quanto in ogni intorno di x = 0 il grafico della funzione compie infinite oscillazioni che si smorzano per  $x \to 0$ , per cui in ogni intorno di tale punto esistono x tali che f(x) > f(0) e punti x' tali che f(x') < f(0).

Il grafico è tracciato in fig. 1.

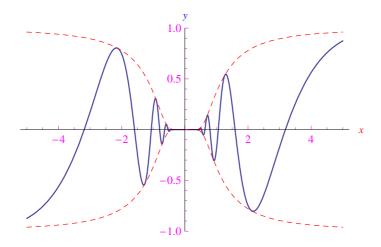


Figura 1: Grafico della funzione 1.