Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Teoria dei due gruppi di neutroni: veloci e lenti (termici)

Riprendiamo dalla lezione precedente, dove avevamo ottenuto l'equazione critica per un reattore spoglio

$$\frac{k}{(1+\tau_c^2 B^2)\,(1+L_{2c}^2 B^2)}=1 \tag{1}$$

che è una forma quadratica in B^2per risolvere la quale vi saranno due soluzioni da prendere in considerazione. Più specificatamente, ricaviamo:

$$B^4+\left(\frac{1}{\tau_c}+\frac{1}{L_{2c}^2}\right)B^2-\frac{k-1}{\tau_c L_{2c}^2}=0 \tag{2}$$

Delle due soluzioni chiamiamo quella positiva con μ^2 e quella negativa con $-v^2$. In tal modo μ^2 e v^2 sono entrambe positive. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{cases} \mu^2=\frac{1}{2}+\left[-\left(\frac{1}{\tau_c}+\frac{1}{L_{2c}^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_c}+\frac{1}{L_{2c}^2}\right)+4\frac{k-1}{\tau_c L_{2c}^2}}\right] \\ -v^2=\frac{1}{2}+\left[-\left(\frac{1}{\tau_c}+\frac{1}{L_{2c}^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_c}+\frac{1}{L_{2c}^2}\right)+4\frac{k-1}{\tau_c L_{2c}^2}}\right] \end{cases} \tag{3}$$

Le soluzioni generali delle equazioni

$$D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc}-\Sigma_{lc}\Phi_{lc}+k\Sigma_{2c}\Phi_{2c}=0, \quad D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c}-\Sigma_{2c}\Phi_{2c}+\Sigma_{lc}\Phi_{lc}=0 \tag{4}$$

implicano combinazioni lineari di μ^2 e $-v^2$. Consideriamo la coppia di equazioni

$$\nabla^2\Phi_{lc}+B^2\Phi_{lc}=0, \quad \nabla^2\Phi_{2c}+B^2\Phi_{2c}=0 \tag{5}$$

e sostituiamo in esse le soluzioni di B^2 testè trovate. Otterremo dunque equazioni del tipo

$$\begin{cases} \nabla^2 X+\mu^2 X=0 \\ \nabla^2 Y-v^2 Y=0 \end{cases} \tag{6}$$

le cui soluzioni dipendono dalla geometria del reattore.

	X	Y
lastra infinita	$\cos\mu x$	$\cosh\mu x$
sfera	$\frac{\sin\mu r}{r}$	$\frac{\sinh\mu r}{r}$
cilindro infinito	$J_0(\mu r)$	$I_0(vr)$

Le soluzioni delle (4) sono combinazioni lineari di X e Y:

$$\begin{cases} \Phi_{lc}=AX+CY \\ \Phi_{2c}=A^*X+C^*Y \end{cases} \tag{7}$$

le cui soluzioni sembrano includere quattro costanti arbitrarie; in realtà solo due sono le soluzioni indipendenti. Precisamente si hanno $\Phi_{lc} = AX$, $\Phi_{2c} = A^*X$ e quindi dalle (6) $\nabla^2\Phi_{lc} = -\mu^2 A^* X$ che sostituita in (4)

$$-D_{2c}\mu^2 A^*X - \Sigma_{2c}^2 A^*X + \Sigma_{2c}AX = 0 \tag{8}$$

Chiamiamo *coefficiente di accoppiamento* (da non confondersi con "sorgente") il rapporto

$$\frac{A^*}{A} = S_1 = \frac{\Sigma_{lc}}{D_{2c}\mu^2 + \Sigma_{2c}} = \frac{D_{lc}}{\tau_c D_{2c}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_{2c}^2} + \mu^2} \tag{9}$$

In modo simile sostituendo CY per Φ_{lc}, C^*Y per Φ_{2c}, v^2C^*Y per $\nabla^2\Phi_{2c}$, la seconda delle (4) diventa

$$D_{2c}v^2C^*Y - \Sigma_{2c}C^*Y + \Sigma_{lc}CY = 0 \tag{10}$$

e dunque potremo similmente scrivere

$$\frac{C^*}{C} = S_2 = \frac{D_{lc}}{\tau_c D_{2c}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_{2c}^2} - v^2} \tag{11}$$

Le (7) allora diventano

$$\begin{cases} \Phi_{lc} = AX + CY \\ \Phi_{2c} = S_1AX + S_2CY \end{cases} \tag{12}$$

Integriamo ora quelle del riflettore.

$$\nabla^2\Phi_{1r} - k_{1r}^2\Phi_{1r} = 0, \quad \nabla^2\Phi_{2r} - k_{2r}^2\Phi_{2r} + \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} = 0 \tag{13}$$

Integrando la prima si ottiene

$$\Phi_{1r} = FZ_1, \tag{14}$$

dove F è una costante arbitraria, mentre

$$Z_1 = \begin{cases} \sinh k_r \left(\frac{1}{2}H + T - x\right), & \text{per una lastra} \\ \sinh \frac{k_r}{r} \left(\frac{1}{2}H + T - r\right), & \text{per una sfera} \end{cases} \tag{15}$$

integrando l'altra equazione

$$\Phi_{2r} = GZ_2 + S_2\Phi_{1r} = GZ_2 + S_3FZ_1 \tag{16}$$

dove G è una costante arbitraria e S_3 coefficiente d'accoppiamento del riflettore. Sostituendo nella (13)

$$S_3\nabla^2\Phi_{1r} - S_3k_{2r}^2\Phi_{1r} + \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} = 0 \tag{17}$$

Essendo dalla (13) $\nabla^2\Phi_{1r} = k_{1r}^2\Phi_{1r}$ si ha

$$S_3 = \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} \cdot \frac{1}{k_{2r}^2 - k_{1r}^2} \tag{18}$$

Riassumendo abbiamo:

$$\begin{cases} \Phi_{lc} = AX + CY \ \text{ e } \Phi_{2c} = S_1AX + S_2CY \\ \Phi_{1r} = FZ_1 \ \text{ e } \Phi_{2e} = GZ_2 + S_3FZ_1 \end{cases} \tag{19}$$

dove le incognite sono A, C, F, G, mentre

$$\Phi_{lc} = \Phi_{1r} \quad \text{e} \quad \Phi_{2c} = \Phi_{2r} \tag{20}$$

sono le condizioni al contorno, per cui sulla superficie di separazione avremo

$$\begin{cases} AX + CY = FZ_1 \\ S_1AX + S_2CY = S_3FZ_1 + GZ_2 \\ D_{lc}AX' + D_{lc}CY' = D_{1r}FZ_1' \\ D_{lc}S_1AX' + D_{lc}S_2CY' = D_{2r}S_3FZ' + D_{2r}GZ' \end{cases} \tag{21}$$

dove l'apice denota l'operazione di derivazione. Abbiamo un sistema omogeneo per le cui soluzioni è necessario e sufficiente che il determinante dei coefficienti sia nullo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & -Z_1 & 0 \\ S_1X & S_2Y & -S_3Z_1 & -Z_2 \\ D_{lc}X' & D_{lc}Y' & -D_{1r}Z_1' & 0 \\ D_{lc}S_1X' & D_{lc}S_2Y' & -D_{2r}S_3FZ' & -D_{2r}Z' \end{vmatrix} \tag{22}$$

Questa può essere riguardata come l'**equazione critica per il metodo due gruppi di un reattore riflesso**. Poiché X e Y includono $H/2$, o R, e Z_1 e Z_2 includono T, o $T - R$, una soluzione esplicita del determinante per trovare T come funzione di R (o di $H/2$), o viceversa, non è possibile. Bisogna allora procedere per tentativi. Un valore approssimato di R, attraverso il metodo di un gruppo d'energia, è stato stimato per lo spessore T. Questo viene inserito nel determinante Δ attraverso $S_1, S_2, S_3, k_{1r}, k_{1r}, \mu^2, v^2$ derivati dalle proprietà del materiale. Il risultato sarà $\Delta \neq 0$. Verrà allora considerato un altro valore di R per un dato spessore di T e di conseguenza calcolato un nuovo determinante. Se anche stavolta il $\Delta \neq 0$ i due Δ vengono riportati in ordinate di un diagramma avente come ascisse il valore di R. La figura 1 chiarisce come si riesce a trovare il $R_{critico}$.

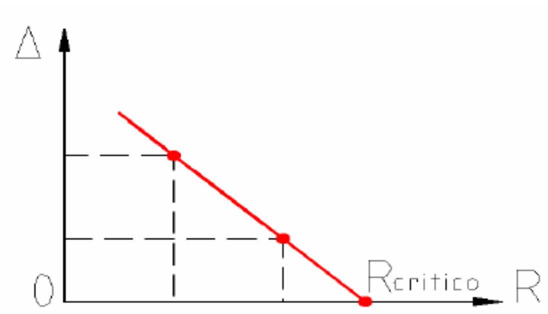
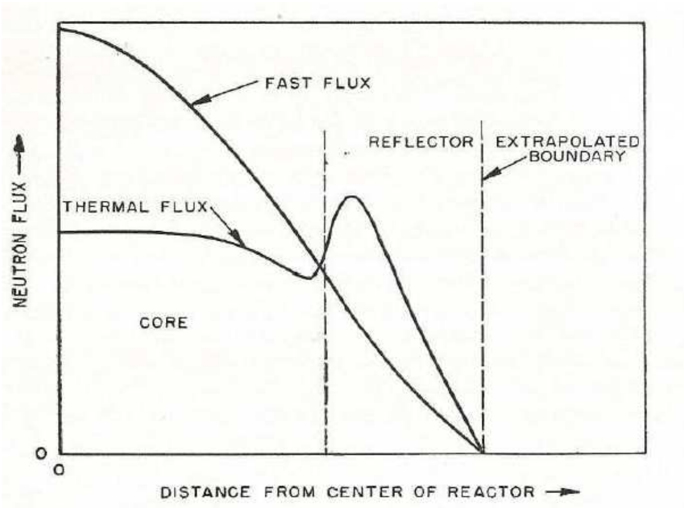


Figura 1: Il valore critico di R annulla il determinante Δ.

Il calcolo può essere ripetuto per diverse composizioni dell'accoppiata combustibile-moderatore allo scopo di determinare il minimo volume critico o la minima massa critica di combustibile. In alternativa a tutto ciò, si possono fissare R e T e assumere come variabile la concentrazione di combustibile, per la quale il determinante Δ si annullerà; a questo punto sarà nota la massa critica del reattore.


FAST FLUX
REFLECTOR
EXTRAPOLATED BOUNDARY
THERMAL FLUX
NEUTRON FLUX
CORE
0
0
DISTANCE FROM CENTER OF REACTOR