Esercizio n. 12

http://www.extrabyte.info

Sia O l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale. Dal punto O viene sparato un proiettile con una velocità di lancio $\mathbf{v}_0$ di modulo assegnato. Supponendo di poter variare con continuità l'angolo di lancio θ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dimostrare che l'inviluppo della famiglia $\mathcal{F}$ di parabole per θ variabile nel suddetto intervallo, è a sua volta una parabola, denominata *parabola di sicurezza.*

Se indichiamo con $\mathcal{R}$ il rettangoloide relativo alla parabola di sicurezza e di base $[0, R_{\max}]$, essendo $R_{\max}$ la massima gittata, verificare le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &P(x,y) \in \mathcal{R} - \partial\mathcal{R} \Longrightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \ni P \\ &P(x,y) \in \partial\mathcal{R} \Longrightarrow \exists! \gamma \ni P \\ &P(x,y) \notin \mathcal{R} \Longrightarrow \nexists \gamma \ni P \end{aligned} \tag{1}$$

Nelle (1) con il simbolo γ indichiamo una parabola della famiglia $\mathcal{F}$. Dalle (1) segue che un qualunque bersaglio $P(x,y)$ interno alla regione $\mathcal{R}$, può essere raggiunto da due diverse traiettorie, se invece il bersaglio appartiene alla frontiera di $\mathcal{R}$, esiste una sola traiettoria. Infine il bersaglio è irrangiungibile se è esterno alla parabola di sicurezza.

***

Scriviamo l'equazione cartesiana della traiettoria (vedere esercizio n. 8):

$$\gamma)\ y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{2}$$

Per definizione:

$$\mathcal{F} = \left\{\gamma \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \tag{3}$$

Sia $P(\xi,\eta) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$. Determiniamo l'angolo di lancio θ, affinchè la traiettoria passi per P:

$$P(\xi,\eta) \in \gamma \Longleftrightarrow \eta = \xi\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\theta\right)\xi^2 \tag{4}$$

Cioè le coordinate di P devono verificare l'equazione della traiettoria. Nella (4) abbiamo tenuto conto della nota relazione $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$.

Risolvendo la (4) rispetto a $\tan\theta$

$$\left(g\xi^2\right)\tan^2\theta-\left(2v_0^2\xi\right)\tan\theta+\left(g\xi^2+2v_0^2\eta\right)=0 \tag{5}$$

$$\tan\theta=\frac{v_0\xi^2\pm\sqrt{\Delta\left(\xi,\eta\right)}}{g\xi^2}, \tag{6}$$

essendo:

$$\Delta\left(\xi,\eta\right)\stackrel{def}{=}v_0^4\xi^2-g\xi^2\left(g\xi^2+2v_0^2\eta\right), \tag{7}$$

il discriminante dell'equazione (5). Evidentemente:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\xi,\eta\right)>0&\Longrightarrow\exists\theta_1,\theta_2\\ \Delta\left(\xi,\eta\right)=0&\Longrightarrow\exists!\theta\\ \Delta\left(\xi,\eta\right)<0&\Longrightarrow\nexists\theta\end{aligned} \tag{8}$$

Quindi affinchè il bersaglio P possa essere colpito dal proiettile, deve essere $\Delta\left(\xi,\eta\right)\geq 0$. Se $\Delta\left(\xi,\eta\right)=0$, esiste un'unica traiettoria che raggiunge il bersaglio. Ci aspettiamo che la condizione $\Delta\left(\xi,\eta\right)=0$ sia l'equazione della parabola di sicurezza che inviluppa le parabole della famiglia $\mathcal{F}$.

Sostituendo alle coordinate ξ,η, le coordinate correnti (x,y):

$$\gamma_*)\ y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{9}$$

Da ciò vediamo che la parabola di sicurezza interseca l'asse y in $\left(\frac{v_0^2}{2g},0\right)$, e l'asse x positivo in $(R_{\max},0)$, essendo $R_{\max}$ il massimo valore della gittata (che si verifica per $\theta=\pi/4$, vedere es. 8). In fig 1 è riportato un insieme di traiettorie inviluppate dalla parabola di sicurezza.

Poniamo:

$$f_*\left(x\right)=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2,$$

Gli zeri di f_*

$$f_*\left(x\right)=0\Longleftrightarrow\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2=0,$$

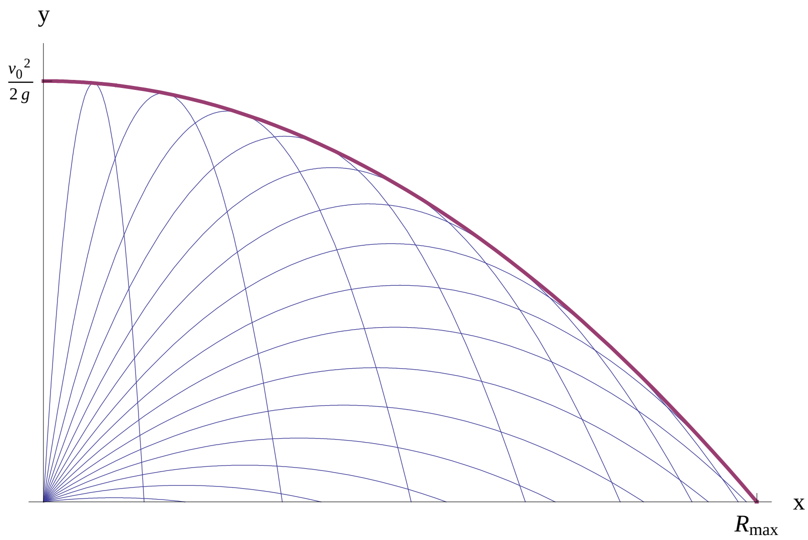

Figure 1: Parabola di sicurezza

e scartando la soluzione < 0:

$$x = R_{\max}$$

Inoltre $f_* (0) = \frac{v_0^2}{2g}$.
Il rettangoloide relativo a $f_* (x)$ e di base $[0, R_{\max}]$ è:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y)^2 \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq R_{\max}, \ \ 0 \leq y \leq f_* (x) \right\}$$

Per un bersaglio $P (x, y) \in \mathcal{R} - \partial \mathcal{R}$

$$0 < x < R_{\max}, \ 0 < y < f_* (x) \tag{10}$$

Dalla seconda disuguaglianza (10):

$$y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \Longleftrightarrow v_0^4 x^2 - g x^2 \left(g x^2 + 2 v_0^2 y \right) = \Delta (x, y) > 0 \Longrightarrow \exists \theta_1, \theta_2$$

Quindi, come ci si aspettava, se il bersaglio è interno alla parabola di sicurezza, è possibile colpirlo con due traiettorie diverse.

Per un assegnato valore dell'ordinata y del bersaglio, possiamo graficare gli angoli di lancio θ_1 e θ_2 in funzione dell'ascissa x del bersaglio, ottenendo il grafico di figura (2).

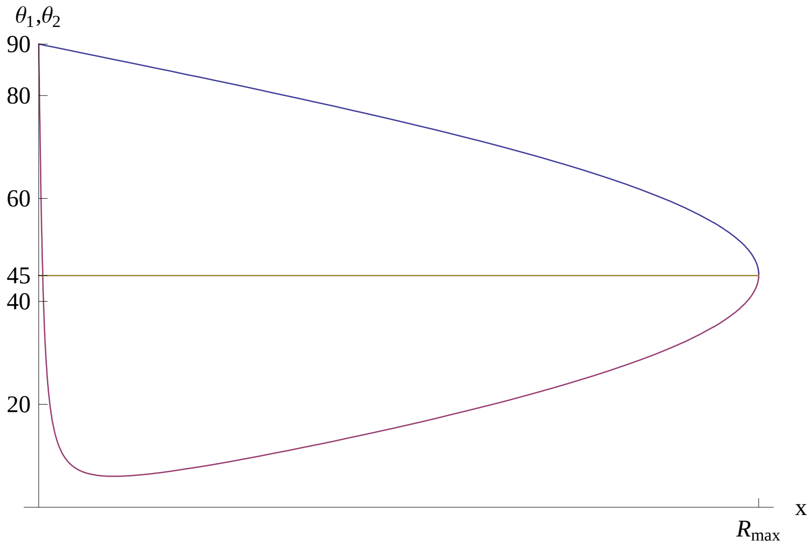

Figure 2: Andamento degli angoli di lancio in funzione di x. Gli angoli sono espressi in gradi.

La curva blu è il grafico della soluzione $\theta_1(x)$ che è sempre $> \pi/4$, mentre la soluzione $\theta_2(x)$ (curva viola) è sempre $< \pi/4$.