Esercizio n. 9

http://www.extrabyte.info

Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale $|\mathbf{v}_0| = 6 \cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ in una direzione che forma un angolo $\theta = 60^\circ$ con l'orizzontale.

Trascurando la resistenza dell'aria, determinare

- La massima altezza raggiunta dal proiettile, e il tempo impiegato a raggiungerla.
- La durata totale di volo.
- La gittata.
- La velocità dopo un minuto di volo.
- La velocità all'altezza di 10 km.

***

Riassumiamo (vedere Esercizio 8) alcune equazioni:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \quad \text{(max altezza)} \\
R &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \quad \text{(gittata)} \\
x(t) &= v_0 t\cos\theta,\; y(t) = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{(eq. parametriche)} \\
|\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\theta + g^2t^2}, \quad \text{(velocità a tutti i tempi)}
\end{aligned} \tag{1}$$

Quindi, la massima altezza è:

$$h = \frac{36 \cdot 10^4}{2 \cdot 9.81} \cdot \frac{3}{4} \simeq 13.76\,\mathrm{km}$$

Indichiamo con t_1 l'istante in cui il proiettile raggiunge la quota h, quindi $y(t_1) = h$. Ma, per evidenti ragioni di simmetria, deve essere $x(t_1) = \frac{R}{2}$, da cui:

$$t_1 = \frac{R}{2v_0\sin\theta} = \frac{v_0}{g}\sin\theta \simeq 52.97\,\mathrm{s}$$

La gittata si calcola dalla seconda delle (1):

$$R \simeq 31.78\,\mathrm{km}$$

La velocità all'istante $t_2 = 60\,\mathrm{s}$ è:

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_2 \sin\theta + g^2 t_2^2} \simeq 307.83\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Per determinare la velocità quando il proiettile raggiunge la quota di 10 km, calcoliamo l'istante t_* tale che $y\left(t_*\right) = y_* = 10^4\,\mathrm{m}$. Dalla

$$y\left(t\right) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2,$$

risolvendo rispetto a t, e scartando la soluzione corrispondente al segno $-$, si ha:

$$t_* = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2 g y_*}}{g} \simeq 80.66\,\mathrm{s}$$

Quindi:

$$v_* = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_* \sin\theta + g^2 t_*^2} \simeq 404.72\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$