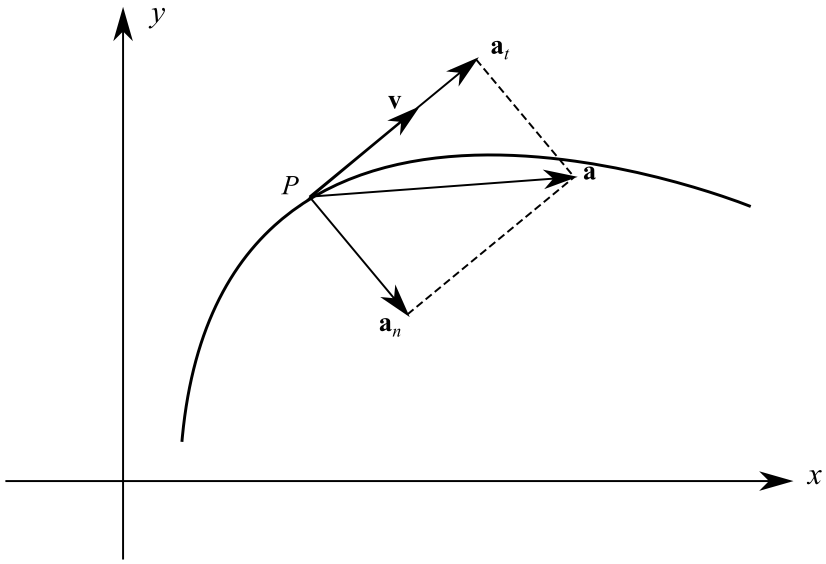
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Algoritmo di risoluzione del moto piano in coordinate cartesiane

(Incluso il problema del Navigatore inerziale)

Marcello Colozzo



Indice

I problemi esaminati in precedenza si sintetizzano in tre singoli problemi (tenere presente la fig. 1).

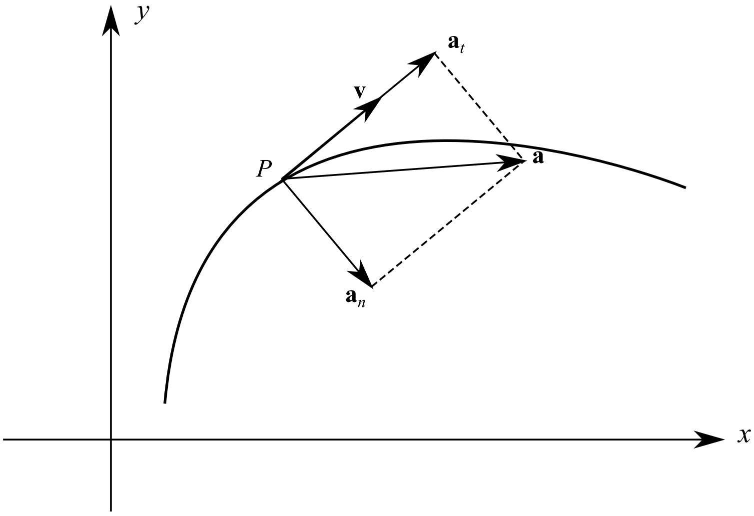


Figura 1: Sintesi dei problemi del moto piano in coordinate cartesiane.

Problema 1

È data la traiettoria γ in forma parametrica:

$$\mathbf{r}\left(t\right)=x\left(t\right)\mathbf{i}+y\left(t\right)\mathbf{j} \tag{1}$$

dove t è il tempo.

Velocità vettoriale:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\equiv\dot{\mathbf{r}} \tag{2}$$

Accelerazione vettoriale

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\equiv\ddot{\mathbf{r}} \tag{3}$$

Versore tangente

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\dot{s}}\mathbf{v} \tag{4}$$

dove

$$\dot{s}=\begin{cases}+\left|\mathbf{v}\right|, \text{ se il moto è progressivo}\\ -\left|\mathbf{v}\right|, \text{ se il moto è regressivo}\end{cases} \tag{5}$$

Accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t=\ddot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{6}$$

Accelerazione normale

$$\mathbf{a}_n=\mathbf{a}-\mathbf{a}_t \tag{7}$$

Equazione oraria

$$s\left(t\right)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}\left(t'\right)^2+\dot{y}\left(t'\right)^2}dt' \tag{8}$$

***

Problema 2

La traiettoria è data in forma cartesiana $y = y(x)$, ed è percorsa con legge oraria $s = s(t)$. Derivando due volte la funzione $s(t)$ otteniamo $\dot{s}, \ddot{s}$ e quindi

$$v = |\dot{s}|\,, \ a_t = \ddot{s}, \ a_n = \frac{\dot{s}^2}{R}, \tag{9}$$

con

$$R = \frac{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}{|f''(x)|} \tag{10}$$

Calcolo di $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$.

Geometria analitica:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{11}$$

Accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \dot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{12}$$

Versore normale

Risolvo

$$\begin{cases} n_x + n_y f'(x) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 = 1 \end{cases} \tag{13}$$

dove n_x, n_y sono le componenti cartesiane di n. Ottengo due soluzioni:

$$\mathbf{n}_\pm = \frac{\mp f'(x)\,\mathbf{i} \pm \mathbf{j}}{\left[1 + f'(x)^2\right]} \Longrightarrow \mathbf{n}_+ + \mathbf{n}_- = \mathbf{0}$$

La soluzione accettabile è il versore orientato verso il semipiano in cui la traiettoria volge la concavità. Lasciando inespresso il segno, otteniamo:

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mp f'(x)\,|f''(x)|\,\mathbf{i} \pm |f''(x)|\,\mathbf{j}}{\left[1 + f'(x)^2\right]^2}, \tag{14}$$

dove si è tenuto conto dell'espressione del raggio di curvatura

$$R = \frac{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}{|f''(x)|} \tag{15}$$

Problema 3 o **Problema del Navigatore inerziale**

La traiettoria è ignota, ed è percorsa con velocità scalare costante $0 < \dot{s} = v$. L'accelerometro misura il modulo dell'accelerazione in funzione del tempo, per cui è nota la funzione $a(t)$. Segue

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \tag{16}$$

Quindi

$$a(t) = \frac{v^2}{R(t)}, \tag{17}$$

essendo $R(t)$ il raggio di curvatura della traiettoria in funzione del tempo. In altri termini, misurare $a(t)$ equivale a misurare a meno del fattore di scala v^2, la curvatura R^{-1} in funzione del tempo. Cioè

$$R(t) = \frac{v^2}{a(t)} \tag{18}$$

Ad esempio, se l'accelerometro di bordo misura $a(t) = 0$, significa che ci stiamo muovendo lungo un segmento di retta ($R(t) \to +\infty$). Se invece, viene misurato un valore costante a_0, significa che ci stiamo muovendo lungo un arco di circonferenza di raggio $R_0 = \frac{v^2}{a_0}$. In tutti gli altri casi la traiettoria è indeterminata, i.e. esistono infinite traiettorie con il medesimo raggio di curvatura in funzione del tempo. Matematicamente, ciò equivale ad integrare l'equazione differenziale del secondo ordine in $y(x)$:

$$y'' = \pm \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R},$$

ove R è una funzione di x. Di contro, noi conosciamo $R(t)$ e per esprimere tale grandezza in funzione di x occorre conoscere l'inversa della $x(t)$, ovviamente ignota.

Riferimenti bibliografici

[1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1.* Ambrosiana, 2011.

[2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.

[3] Sette D. Wanderlingh F. *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*, 1967